

Esercizi 1 - Calcolo combinatorio e probabilità elementare

Esercizio 1. Calcolare il numero di anagrammi (di senso compiuto o meno) delle seguenti parole:

anagramma, matematica, combinatorica.

Esercizio 2. Sia N intero positivo.

1. Trovare il numero di quaterne (x, y, z, t) di interi positivi che risolvono:

a) $x + y + z + w = N$;

b) $x + y + z + w \leq N$.

2. Trovare il numero di quaterne (x, y, z, t) di interi non-negativi che risolvono:

a) $x + y + z + w = N$;

b) $x + y + z + w \leq N$.

Esercizio 3. Quante sono le funzioni strettamente crescenti da $\{1, 2, 3, 4\}$ in $\{1, 2, \dots, 12\}$ tali che $f(3) = 9$? E quelle tali che $f(3) \geq 9$?

Esercizio 4. Quante sono le funzioni non decrescenti da $\{1, 2, 3, 4\}$ in $\{1, 2, \dots, 10\}$ tali che $f(3) = 8$? E quelle tali che $f(3) \geq 8$?

Esercizio 5 (Paradosso dei compleanni). N amici partecipano ad una festa. Calcolare la probabilità $p(N)$ che essi festeggino il proprio compleanno in N giorni distinti dell'anno. (Supponiamo che tutti gli anni abbiano 365 giorni e che le date di nascita siano tutte equiprobabili).

Provare che $p: N \in \{1, 2, \dots, 365\} \rightarrow p(N)$ è strettamente decrescente e determinare il primo valore di N per cui $p(N) > \frac{1}{2}$.

Esercizio 6. Sia A un insieme finito e sia $n = \#A$. Sappiamo che le permutazioni di A sono $n!$ Provare che il numero di permutazioni di A senza punti fissi è

$$d_n := n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}.$$

e che per $n \geq 2$, d_n è l'intero più vicino a $\frac{n!}{e}$.

Esercizio 7. Sia A insieme finito, $\#A = n$. Usando l'esercizio precedente per calcolare il numero di permutazioni di A aventi un solo punto fisso.

Esercizio 8. Si gioca a poker con le carte dall'asso al 7. Calcolare la probabilità di avere un poker servito e ;a probabilità di avere un colore servito.

Esercizio 9. Un'urna contiene 10 palline bianche, 8 palline rosse e 12 palline nere. Si estraggono 4 palline. Calcolare la probabilità di estrarre:

1. una pallina bianca, 2 palline rosse e una pallina nera, nel caso in cui si reimbussoli tra una estrazione e l'altra;
2. una pallina bianca, 2 palline rosse e una pallina nera, nel caso in cui non si reimbussoli tra una estrazione e l'altra.