1 Successioni

Sia E un insieme. Una *successione (a valori) in E* è, per definizione, una funzione definita in $\mathbb{N}$ e a valori in E:

$$a\colon k \in \mathbb{N} \mapsto a(k) \in E.$$

Si è soliti indicare $a(k)$ col simbolo a_k. La successione si indica anche col simbolo $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ o, più brevemente col simbolo $\{a_k\}$.

Data una successione $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e una successione strettamente monotona $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathbb{N}$, la successione $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definita da $b_k := a_{\ell_k} = (a \circ \ell)(k)$ si dice *successione estratta* dalla successione $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Consideriamo successioni a valori in $\mathbb{R}$ (che chiamiamo anche *successioni reali*) o in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1. *Sia a_k una successione reale.*

1. *Sia $L \in \mathbb{R}$. Dico che a_k* converge a L, *e scrivo $\lim_k a_k = L$ o $\lim_{k\to\infty} a_k = L$ o $a_k \to L$, se*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{k} \in \mathbb{N}\colon \forall k > \overline{k} \quad |a_k - L| < \varepsilon$$
ovvero se
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{k} \in \mathbb{N}\colon \forall k > \overline{k} \quad a_k \in I(L, \varepsilon).$$
2. *Dico che a_k* diverge a $+\infty$, *e scrivo $\lim_k a_k = +\infty$ o $\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty$ o $a_k \to +\infty$, se*
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \overline{k} \in \mathbb{N}\colon \forall k > \overline{k} \quad a_k > M.$$
3. *Dico che a_k* diverge a $-\infty$, *e scrivo $\lim_k a_k = -\infty$ o $\lim_{k\to\infty} a_k = -\infty$ o $a_k \to -\infty$, se*
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \overline{k} \in \mathbb{N}\colon \forall k > \overline{k} \quad a_k < M.$$

1.1 Somma, prodotto e rapporto di successioni

Valgono le seguenti proprietà: Siano a_k e b_k due successioni in $\mathbb{R}$.

1. Se a_k converge a L e b_k converge a M, allora
   a) $a_k + b_k \to L + M$;
   b) $a_k b_k \to LM$;
   c) se $M \neq 0$ e $b_k \neq 0$, $\dfrac{a_k}{b_k} \to \dfrac{L}{M}$.
2. Se $a_k \to +\infty$ e b_k è limitata inferiormente, allora $a_k + b_k \to +\infty$;
3. Se $a_k \to -\infty$ e b_k è limitata superiormente, allora $a_k + b_k \to -\infty$;
4. Se $a_k \to +\infty$ e b_k converge a $L > 0$ o diverge a $+\infty$, allora $a_k b_k \to +\infty$;
5. Se $a_k \to +\infty$ e b_k converge a $L < 0$ o diverge a $-\infty$, allora $a_k b_k \to -\infty$;

6. Se $a_k \to -\infty$ e b_k converge a $L > 0$ o diverge a $+\infty$, allora $a_k b_k \to -\infty$;

7. Se $a_k \to -\infty$ e b_k converge a $L < 0$ o diverge a $-\infty$, allora $a_k b_k \to +\infty$;

8. Se $|a_k| \to +\infty$, allora $\dfrac{1}{a_k} \to 0$;

9. Se a_k converge a 0 e $a_k \neq 0$, allora $\dfrac{1}{|a_k|} \to +\infty$.

Dimostro la 4. nel caso b_k convergente a $L > 0$:
Sappiamo che

a. $\forall C \in \mathbb{R}$ esiste $\overline{k_1} \in \mathbb{N}$ tale che $a_k > C$ $\forall k > \overline{k_1}$
b. $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\overline{k_2} \in \mathbb{N}$ tale che $L - \varepsilon < a_k < L + \varepsilon$ $\forall k > \overline{k_2}$

Sia $M > 0$. Scelgo $C = \dfrac{2M}{L}$ e $\varepsilon = \dfrac{L}{2}$. Allora esistono $\overline{k_1}$ e $\overline{k_2}$ tali che

$$a_k > \frac{2M}{L} \quad \forall k > \overline{k_1}, \qquad\qquad b_k > \frac{L}{2} \quad \forall k > \overline{k_2},$$

e sia $\overline{k} = \max\{\overline{k_1}, \overline{k_2}\}$. Allora, per ogni $k > \overline{k}$ si ha

$$a_k b_k > \frac{2M}{L}\frac{L}{2} = M$$

e dunque $a_k b_k \to +\infty$.

Teorema 1.1 (dei due carabinieri)**.** *Siano a_k, b_k e c_k successioni in $\mathbb{R}$ tali che*

$$a_k \leq b_k \leq c_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se $\lim a_k = \lim c_k = L$, allora anche $b_k \to L$. Se $\lim a_k = +\infty$, allora anche $b_k \to +\infty$. Se $\lim c_k = -\infty$, allora anche $b_k \to -\infty$.

Definizione 1.2. *Sia a_k una successione in $\mathbb{R}^n$ e sia $L \in \mathbb{R}^n$. Dico che a_k* converge a L *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{k} \in \mathbb{N} \colon \forall k > \overline{k} \quad a_k \in I(L, \varepsilon)$$

ovvero se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{k} \in \mathbb{N} \colon \forall k > \overline{k} \quad \|a_k - L\| < \varepsilon.$$

Osservazione 1.1. *Sia a_k una successione in $\mathbb{R}^n$, $a_k = \big(a_{k,1},\ a_{k,2},\ \ldots, a_{k,n}\big)$. Sia $L = \big(L_1,\ L_2,\ \ldots, L_n\big) \in \mathbb{R}^n$ Si dimostra facilmente che a_k converge a L se e solo se a_k converge a L* componente per componente *cioè se e solo se $a_{k,i}$ converge a L_i per ogni $i = 1, \ldots, n$.*

Inoltre a_k converge a L se e solo se la successione delle distanze $d_k := \|a_k - L\|$ *converge a zero.*

1.2 Alcuni limiti notevoli

Useremo ripetutamente la disuguaglianza (già dimostrata per induzione)

$$(1+h)^k \geq 1 + kh \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall h > 0.$$

- $\lim_k k^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0, \\ 1 & \alpha = 0, \\ 0 & \alpha < 0. \end{cases}$
  1. Se $\alpha = 0$, allora $k^\alpha = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
  2. Se $\alpha > 0$ e $M \in \mathbb{R}$, allora $k^\alpha > M$ per ogni $k > \overline{k} \geq M^{\frac{1}{\alpha}}$.
  3. Se $\alpha < 0$, allora $k^\alpha = \dfrac{1}{k^{-\alpha}}$. Poiché il denominatore diverge a $+\infty$, abbiamo la tesi.

- $\lim_k \sqrt[k]{a} = 1$ per ogni $a > 0$

  Se $a = 1$ la tesi è ovvia perché $\sqrt[k]{1} = 1$ per ogni $k \in N$.
  Supponiamo $a > 1$.
  Poiché $a > 1$, anche $\sqrt[k]{a} > 1$ e dunque possiamo scrivere $\sqrt[k]{a} = 1 + h_k$ con $h_k > 0$.
  Si ha quindi
  $$a = (1 + h_k)^k \geq 1 + kh_k,$$
  da cui
  $$0 \leq h_k \leq \frac{a-1}{k}.$$
  Per il teorema dei due carabinieri dunque $\lim h_k = 0$ e quindi
  $$\lim_k \sqrt[k]{a} = \lim_k (1 + h_k) = 1 + 0 = 1.$$
  Se $a \in (0,1)$ si ha $\sqrt[k]{a} = \dfrac{1}{\sqrt[k]{a^{-1}}}$. Poiché $a^{-1} > 1$, per il passo precedente, $\sqrt[k]{a^{-1}}$ converge a 1 e dunque $\sqrt[k]{a} = \dfrac{1}{\sqrt[k]{a^{-1}}}$ converge a $\dfrac{1}{1} = 1$.

- Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora $\lim_k \alpha^k \begin{cases} = +\infty & \text{se } \alpha > 1, \\ = 1 & \text{se } \alpha = 1, \\ = 0 & \text{se } \alpha \in (-1,1), \\ \text{non esiste} & \text{se } \alpha \leq -1. \end{cases}$
  a. Se $\alpha = 1$, allora $\alpha^k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Analogamente, se $\alpha = 0$, allora $\alpha^k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
  b. Supponiamo $\alpha > 1$. Allora $\alpha = 1 + h$ per qualche $h > 0$. Dunque
  $$\alpha^k = (1+h)^k > 1 + hk > hk.$$
  Poiché $h > 0$ abbiamo $hk \to +\infty$ e dunque $\alpha^k \to +\infty$.

c. Supponiamo $\alpha \in (0,1)$. Allora $\alpha = \dfrac{1}{1+h}$ per qualche $h > 0$. Dunque

$$0 \leq \alpha^k = \frac{1}{(1+h)^k} \leq \frac{1}{1+hk} \leq \frac{1}{h}\frac{1}{k}.$$

Poiché $\dfrac{1}{h}$ è una costante e $\dfrac{1}{k} \to 0$, per i due carabinieri abbiamo anche $\alpha^k \to 0$.

d. Supponiamo $\alpha \in (-1,0)$. Allora

$$0 \leq \left|\alpha^k\right| \leq |\alpha|^k \to 0$$

e dunque,

$$-|\alpha|^k \leq \alpha^k \leq |\alpha|^k .$$

Per il teorema dei due carabinieri $\alpha^k \to 0$.

e. $\alpha \leq -1$. In questo caso $\alpha^k \geq 1$ se k pari, $\alpha^k \leq -1$ se k dispari. Dunque il limite non esiste.

- $\lim_k \sqrt[k]{k} = 1$.

  Pongo $b_k = \sqrt{\sqrt[k]{k}}$, da cui $\sqrt[k]{k} = b_k^2$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $b_k \geq 1$ quindi pongo $b_k = 1 + h_k$, con $h_k \geq 0$. Allora

$$\sqrt{k} = b_k^k = (1+h_k)^k \geq 1 + kh_k$$

  da cui

$$0 \leq h_k \leq \frac{\sqrt{k}-1}{k}.$$

  Per il teorema dei cue carabinieri $h_k \to 0$ e dunque

$$\sqrt[k]{k} = b_k^2 = (1+h_k)^2 \to 1.$$

- Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora $\lim_k \sqrt[k]{k^\alpha} = 1$.

1. Se $\alpha = 0$, allora $k^\alpha = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
2. Se $\alpha > 0$, allora esiste $\bar{\ell} \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ tale che $\bar{\ell} \leq \alpha < \ell + 1$ e dunque $k^{\bar{\ell}} \leq k^\alpha < k^{\bar{\ell}+1}$. Si ha dunque

$$\underbrace{\sqrt[k]{k} \dots \sqrt[k]{k}}_{\bar{\ell} \text{ fattori}} = \left(\sqrt[k]{k}\right)^{\bar{\ell}} \leq \sqrt[k]{k^\alpha} < \left(\sqrt[k]{k}\right)^{\bar{\ell}+1} = \underbrace{\sqrt[k]{k} \dots \sqrt[k]{k}}_{\bar{\ell}+1 \text{ fattori}}.$$

   Per il teorema dei due carabinieri il limite esiste e vale 1.
3. Se $\alpha < 0$, allora $\sqrt[k]{k^\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt[k]{k^{-\alpha}}}$ e dunque la tesi.

- Se $0 < a < b$, allora $\lim_k \sqrt[k]{a^k + b^k} = b$.

$$b^k \leq a^k + b^k \leq 2b^k$$

e dunque

$$b \leq \sqrt[k]{a^k + b^k} \leq b\sqrt[k]{2}.$$

Per il teorema dei due carabinieri si ottiene la tesi.

- $\lim_k \frac{k!}{k^k} = 0$.

Sicuramente $\frac{k!}{k^k} > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. D'altra parte

$$\frac{k!}{k^k} = \frac{k}{k} \frac{k-1}{k} \frac{k-2}{k} \cdots \frac{3}{k} \frac{2}{k} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k}.$$

Per il teorema dei due carabinieri si ottiene la tesi.

- $\lim_k \frac{a^k}{k!} = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Consideriamo prima il caso $a = j \in \mathbb{N}$. Si ha

$$\frac{j^k}{k!} = \frac{j}{k} \frac{j}{k-1} \cdots \frac{j}{2} \frac{j}{1}.$$

Per ogni $k > j$ si ha allora

$$\frac{j^k}{k!} = \frac{j^{k-j}}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot (j+2) \cdot (j+1)} \frac{j^j}{j!} \leq \frac{j}{k} \frac{j^j}{j!}.$$

Per il teorema dei due carabinieri si ha la tesi.

Se $a \in \mathbb{R}$, esiste comunque $j \in \mathbb{N}$ tale che $|a| \leq j$, da cui $0 \leq \left| \frac{a^k}{k!} \right| \leq \frac{|a|^k}{k!} \leq \frac{j^k}{k!} \to 0$.

Con il teorema dei due carabinieri otteniamo la tesi.

- $\lim_k ka^k = 0$ per ogni $a \in (-1, 1)$.Per $a = 0$, $ka^k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Supponiamo $a \in (0, 1)$. Allora anche $\sqrt{a} \in (0, 1)$ e dunque posso scrivere $\sqrt{a} = \frac{1}{1+h}$ per qualche $h > 0$. Si ha dunque

$$\sqrt{a^k} = \frac{1}{(1+h)^k} \leq \frac{1}{1+hk} \leq \frac{1}{hk}$$

da qui

$$0 \leq ka^k \leq k\frac{1}{h^2k^2} = \frac{1}{h^2} \frac{1}{k} \to 0.$$

Per $a \in (-1, 0)$ abbiamo

$$0 \leq \left| ka^k \right| \leq k\left| a \right|^k \to 0.$$

- $\lim_k k^\alpha a^k = 0$ per ogni $a \in (-1,1)$ e ogni $\alpha > 0$.

$$0 \leq \left|k^\alpha a^k\right| = \left(k\,|a|^{\frac{k}{\alpha}}\right)^\alpha = \left(k\left(|a|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^k\right)^\alpha \to 0.$$

- $\lim_k \dfrac{\log k}{k^\alpha} = 0$ per ogni $a > 1$ e ogni $\alpha > 0$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \leq \log_a k < n+1$ ovvero tale che $a^n \leq k < a^{n+1}$ e dunque $a^{\alpha n} \leq k^\alpha < a^{\alpha(n+1)}$. Quindi
$$0 \leq \frac{\log_a k}{k^\alpha} < \frac{n+1}{a^{\alpha n}} = n(a^{-\alpha})^n + (a^{-\alpha})^n.$$
Poiche $a > 1$ e $\alpha > 0$ si ha che $n(a^{-\alpha})^n$ e $(a^{-\alpha})^n$ convergono entrambi a 0 e dunque la tesi.

1.3 Alcuni teoremi

Teorema 1.2 (Permanenza del segno)**.** *Se a_k converge a $L > 0$ o diverge a $+\infty$, allora tutti i termini della successione - tranne al più un numero finito - sono positivi.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema nel caso $a_k \to L > 0$. Sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{k} \in \mathbb{N} \colon \forall k > \overline{k} \quad L - \varepsilon < a_k < L + \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = L$, in particolare si ha che esiste $\overline{k}$ tale che $a_k > 0$ per ogni $k > \overline{k}$. □

Proposizione 1.1. *Ogni successione (in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$) convergente è limitata.*

Dimostrazione. Dimostro la proposizione per successioni in $\mathbb{R}$.
Sia a_k la successione e sia L il suo limite: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{k}$ tale che $|a_k - L| < \varepsilon$. Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ottiene

$$\exists \overline{k} \colon\ |a_k - L| < 1 \quad \forall k > \overline{k}.$$

Dunque, per ogni $k > \overline{k}$ si ha

$$|a_k| = |a_k - L + L| \leq |a_k - L| + |L| < 1 + |L|\,.$$

Posto $M = \max\left\{|a_1|\,,\ |a_2|\,,\ \ldots,\ \left|a_{\overline{k}}\right|,\ 1 + |L|\right\}$ si ha $|a_k| < M$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
Per successioni in $\mathbb{R}^n$ la dimostrazione è esattamente la stessa, basta sostiuire il valore assoluto con la norma. □

Proposizione 1.2. *Se una successione ammette limite, allora ogni successione estratta ha lo stesso limite.*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione per a_k successione in $\mathbb{R}$ e convergente. Sia $\lim a_k = L$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{k} \colon \forall k > \overline{k} \quad |a_k - L| < \varepsilon.$$

Sia a_{ℓ_k} estratta da a_k e sia $\varepsilon > 0$. Poiché $\{\ell_k\}$ è una successione strettamente monotona in $\mathbb{N}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $\ell_k \geq k$ e dunque, per ogni $k > \overline{k}$ si ha $\ell_k > \overline{k}$ e dunque $|a_{\ell_k} - L| < \varepsilon \ \forall k > \overline{k}$. Dunque a_{ℓ_k} converge a L. □

Teorema 1.3. *Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Vedi testo. □

Definizione 1.3. *Un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$ si dice* compatto (per successioni) *se da ogni successione a valori in K è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in K.*

Teorema 1.4. *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Allora K è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. 1) Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato. Dimostriamo che K è compatto.
Sia $\{a_k\}$ successione a valori in K. Poiché K è limitato, anche la successione a_k è limitata, dunque, per il teorema 1.3 esiste una sottosuccessione estratta a_{ℓ_k} convergente. Sia $L = \lim_k a_{\ell_k}$. Devo dimostrare che $L \in K$.

Supponiamo, per assurdo, che $L \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Poiché K è chiuso, il complementare $\mathbb{R}^n \setminus K$ è aperto e dunque esiste un intorno $I(L, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$. D'altraparte, poiché $L = \lim_k a_{\ell_k}$ sappiamo che esiste $\overline{k} \in N$ tale che $a_{\ell_k} \in I(L, r)$ per ogni $i > \overline{k}$. Abbiamo un assurdo perché i punti a_{ℓ_k} sono in K e $I(L, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$.

2) Supponiamo K sia compatto. Dimostriamo che K è limitato.
Se K non è limitato, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste almeno un punto di K, che indico con x_k tale $\|x_k\| > i$. Considero la successione $\{x_k\}$ e una sua qualsiasi estratta $\{x_{\ell_k}\}$. Poiché $\ell_k \geq i$ si ha $\|x_{\ell_k}\| > i$. Dunque $\{x_{\ell_k}\}$ non è limitata e dunque non converge. Dunque K non è compatto: assurdo.

3) Supponiamo K sia compatto. Dimostriamo che K è chiuso.
Basta dimostrare che $\mathcal{D}K \subset K$. Sia dunque $x_0 \in \mathcal{D}K$:
esiste $a_1 \in K$ tale che $a_1 \in I(x_0, 1)$
esiste $a_2 \in K$ tale che $a_1 \in I\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$
Ovvero, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $a_k \in K$ tale che $a_k \in I\left(x_0, \frac{1}{k}\right)$. Considero la successione $\{a_k\}$: si ha $0 \leq \|a_k - x_0\| \leq \dfrac{1}{k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque, per il teorema dei due carabinieri $\lim_k \|a_k - x_0\| = 0$ e dunque $\lim_k a_k = x_0$. Poiché ogni successione estratta da $\{a_k\}$ converge a x_0 e K è compatto, deve necessariamente essere $x_0 \in K$. Dunque $\mathcal{D}K \subset K$ e quindi K è chiuso. □

1.4 Esercizi

$$\lim_k \frac{2^{k+1}+5^k}{2^k+5^{k-1}} \qquad \lim_n \left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{n^2+n}\right) \qquad \lim_k \left(\sqrt{\frac{k+1}{k+2}}-\frac{\sqrt{k^2+\alpha}}{k}\right)$$

$$\lim_k \sqrt[k]{k^\alpha+1} \qquad \lim_n (n-2^n) \qquad \lim_k \left(k^{\sqrt{k}}-2^k\right)$$

$$\lim_k \frac{k^2-\sin(k)}{k^2+k\cos(k)} \qquad \lim_n \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \qquad \lim_n \frac{2^n(n-1)}{n^2+n}$$

1.5 Successioni monotone e numero di Nepero

Vedi testo

Esercizio 1.5.1. $\lim_n \sqrt[n]{n}\dots\sqrt[2n]{2n}=+\infty$

Traccia della soluzione: posto $a_n := \sqrt[n]{n}$ si dimostra che $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \geq 4$. Dunque

$$\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n+1]{n+1}\dots\sqrt[2n]{2n}=a_na_{n+1}\dots a_{2n}\geq a_{2n}^{n+1}=\left(\sqrt[2n]{2n}\right)^{n+1}=(2n)^{\frac{n+1}{2n}}\geq\sqrt{n}.$$

Proposizione 1.3. *Sia $\{a_k\}_k$ una successione a termini positivi: $a_k>0$ per ogni $k\in\mathbb{N}$. Se $\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k}$ esiste, allora esiste anche $\lim_k \sqrt[k]{a_k}$ e i due limiti sono uguali.*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione nel caso in cui il rapporto $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ converge ad un limite positivo L.

Per ogni $\delta>0$ esiste $\overline{k}$ tale che $\forall k>\overline{k}$ si ha $L-\delta<\frac{a_{k+1}}{a_k}<L+\delta$ ovvero

$$a_k(L-\delta)<a_{k+1}<(L+\delta)a_k. \qquad \forall k>\overline{k}.$$

Ovviamente possiamo limitarci a considerare il caso $\delta\in(0,L)$.
Scelgo $k=\overline{k}+1$:

$$a_{\overline{k}+1}(L-\delta)<a_{\overline{k}+2}<a_{\overline{k}+1}(L+\delta).$$

Scelgo $k=\overline{k}+2$:

$$a_{\overline{k}+1}(L-\delta)^2<a_{\overline{k}+2}(L-\delta)<a_{\overline{k}+3}<a_{\overline{k}+2}(L+\delta)<a_{\overline{k}+1}(L+\delta)^2.$$

Scelgo $k=\overline{k}+2$:

$$a_{\overline{k}+1}(L-\delta)^3<a_{\overline{k}+3}(L-\delta)<a_{\overline{k}+4}<a_{\overline{k}+3}(L+\delta)<a_{\overline{k}+1}(L+\delta)^3.$$

In generale, per induzione, si prova che

$$a_{\overline{k}+1}(L-\delta)^s<a_{\overline{k}+s+1}<a_{\overline{k}+1}(L+\delta)^s \qquad \forall s\in\mathbb{N}$$

e dunque

$$\sqrt[\overline{k}+s+1]{a_{\overline{k}+1}}(L-\delta)^{\frac{s}{\overline{k}+s+1}}<\sqrt[\overline{k}+s+1]{a_{\overline{k}+s+1}}<\sqrt[\overline{k}+s+1]{a_{\overline{k}+1}}(L+\delta)^{\frac{s}{\overline{k}+s+1}} \qquad \forall s\in\mathbb{N}.$$

Quando s tende a $+\infty$,

a. $\sqrt[\overline{k}+s+1]{a_{\overline{k}+1}}$ converge a 1,
b. $(L-\delta)^{\frac{s}{\overline{k}+s+1}}$ converge a $L-\delta$,
c. $(L+\delta)^{\frac{s}{\overline{k}+s+1}}$ converge a $L+\delta$,

dunque

a. $\sqrt[\overline{k}+s+1]{a_{\overline{k}+1}}(L-\delta)^{\frac{s}{\overline{k}+s+1}}$ converge a $L-\delta$,
b. $\sqrt[\overline{k}+s+1]{a_{\overline{k}+1}}(L+\delta)^{\frac{s}{\overline{k}+s+1}}$ converge a $L+\delta$.

Di conseguenza, per definizione di limite abbiamo:

$$\forall\gamma>0 \quad \exists\overline{s}_1\colon \forall s>\overline{s}_1 \qquad \sqrt[\overline{k}+s+1]{a_{\overline{k}+1}}(L+\delta)^{\frac{s}{\overline{k}+s+1}} < L+\delta+\gamma$$
$$\forall\gamma>0 \quad \exists\overline{s}_2\colon \forall s>\overline{s}_2 \qquad \sqrt[\overline{k}+s+1]{a_{\overline{k}+1}}(L-\delta)^{\frac{s}{\overline{k}+s+1}} > L-\delta-\gamma$$

Scegliendo $\overline{s}:=\max\{\overline{s}_1,\overline{s}_2\}$ abbiamo

$$L-\delta-\gamma < \sqrt[\overline{k}+s+1]{a_{\overline{k}+s+1}} < L+\delta+gamma \qquad \forall s>\overline{s}.$$

Sia $\varepsilon>0$. Scegliamo $\delta=\gamma=\dfrac{\varepsilon}{2}$. Abbiamo dimostrato che esiste $\overline{s}$ tale che

$$L-\varepsilon < \sqrt[\overline{k}+s+1]{a_{\overline{k}+s+1}} < L+\varepsilon \qquad \forall s>\overline{s}$$

ovvero $\sqrt[n]{a_n}$ converge a L. □

Esercizio 1.5.2. *Dimostrare la proposizione 1.3 nel caso in cui* $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ *converge a zero e nel caso in cui* $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ *diverge a* $+\infty$.

Esercizio 1.5.3. *Calcolare* $\lim_n \dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)\dots(2n-1)2n}}{n}$

1.6 Criterio di Cauchy

Vedi testo.

1.7 Successioni ricorsive

Vedi testo.

1.8 Somme alla Cesáro

Proposizione 1.4. *Sia* $\{a_k\}_k$ *una successione. Supponiamo che* $\lim_k a_k$ *esista. Allora esiste anche* $\lim_k \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$ *e i due limiti sono uguali.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione nel caso in cui a_k converga. Sia $L = \lim_k a_k$. Sappiamo che
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overline{k}\colon \forall k > \overline{k} \qquad L - \varepsilon < a_k < L + \varepsilon.$$
Per ogni $k > \overline{k}$ posso scrivere
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{\overline{k}}}{k} + \frac{a_{\overline{k}+1} + a_2 + \ldots + a_k}{k}$$
e dunque
$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{\overline{k}}}{k} + \frac{(k-\overline{k})(L-\varepsilon)}{k} &< \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \\ &< \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{\overline{k}}}{k} + \frac{(k-\overline{k})(L+\varepsilon)}{k}.\end{aligned}$$
Poiché, quando $k \to \infty$, $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{\overline{k}}}{k}$ converge a 0, $\frac{(k-\overline{k})(L-\varepsilon)}{k}$ converge a $L-\varepsilon$ e $\frac{(k-\overline{k})(L+\varepsilon)}{k}$ converge a $L+\varepsilon$, abbiamo che
$$\begin{aligned}&\forall \delta > 0 \exists \overline{\nu}_1\colon \forall k > \overline{\nu}_1 \qquad \frac{(k-\overline{k})(L-\varepsilon)}{k} > L - \varepsilon - \delta \\ &\forall \delta > 0 \exists \overline{\nu}_2\colon \forall k > \overline{\nu}_2 \qquad \frac{(k-\overline{k})(L+\varepsilon)}{k} < L + \varepsilon + \delta.\end{aligned}$$
Sia $\overline{\nu} := \max\{\overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2\}$. Allora, per ogni $k > \overline{\nu}$ abbiamo
$$L - \delta - \varepsilon < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} < L + \delta + \varepsilon.$$
Sia $\gamma > 0$. Scelgo $eps = \delta = \frac{\gamma}{2}$. Allora, per ogni $k > \max\{\overline{k}, \overline{\nu}\}$ si ha
$$L - \gamma < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} < L + \gamma$$
cioè $\lim_k \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} = L$. $\square$

Esercizio 1.8.4. *Calcolare* $\lim_k \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \ldots \sqrt[k]{k}}{k}$ *e* $\lim_n \frac{\ln(n!)}{n}$.