1 Numeri naturali, interi e razionali

Definizione 1.1. *Sia A un sottoinsieme dei numeri reali. Diciamo che A è un* insieme induttivo *se*

1. $1 \in A$
2. *per ogni $x \in A$, si ha $x + 1 \in A$*

Definizione 1.2. *Chiamo* insieme dei numeri naturali*, e indico col simbolo $\mathbb{N}$ l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi di $\mathbb{R}$.*

Osservazione 1.1. $\mathbb{N} \neq \emptyset$ *perché 1 appartiene a tutti gli insiemi induttivi.*

Definizione 1.3. *Chiamo* insieme dei numeri relativi*, e indico col simbolo $\mathbb{Z}$ l'insieme*

$$\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \colon -x \in \mathbb{N}\}$$

e infine chiamo insieme dei numeri razionali*, e indico col simbolo $\mathbb{Q}$ l'insieme*

$$\{x \in \mathbb{R} \colon x = pq^{-1},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}.$$

2 Assioma di Dedekind

Le proprietà di $\mathbb{R}$ che abbiamo dato sinora sono soddisfatte anche dai numeri razionali. Abbiamo però visto che i numeri razionali non ci permettono di effettuare alcune operazioni che vorremmo (osserviamo infatti che $2 = 1 + 1 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ e, la volta scorsa, abbiamo visto che non esiste alcun $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$ tale che $x^2 = 2$).

Richiediamo che l'insieme dei numeri reali soddisfi una ulteriore proprietà, detta *assioma di Dedekind*. Diamo innanzitutto la seguente definizione

Definizione 2.1. *Dati A e B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, dico che (A, B) è una sezione di $\mathbb{R}$ se*

1. *A e B sono una partizione di $\mathbb{R}$, ovvero*

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = \mathbb{R};$$

2. *per ogni $x \in A$ e per ogni $y \in B$ risulta $x < y$.*

Assioma 2.1 (Assioma di Dedekind)**.** *Per ogni sezione (A, B) di $\mathbb{R}$ esiste uno ed un solo elemento $L \in \mathbb{R}$ tale che*

$$x \leq L \leq y \quad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

Il numero L si dice elemento separatore della sezione (A, B).

Mostriamo ora come l'assioma di Dedekind ci assicuri l'esistenza e l'unicità della radice quadrata di 2 in $\mathbb{R}$. Poiché tale radice non esiste in $\mathbb{Q}$, questo ci garantisce che stiamo lavorando con un insiemi di numeri *diverso* da $\mathbb{Q}$. Definisco

$$A = \{x \in \mathbb{R} \colon x < 0\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0,\ x^2 < 2\right\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0,\ x^2 \geq 2\right\}.$$

Sicuramente A e B non sono vuoti ($1 \in A$ e $2 \in B$, per esempio) e, grazie alla proprietà di ordinamento totale di $\mathbb{R}$, essi sono una partizione di $\mathbb{R}$.

Siano $x \in A$, $y \in B$. Devo mostrare che $x < y$. Se $x < 0$, allora $x < 0 \leq y$ e dunque $x < y$.

Se $x \geq 0$, allora $x^2 < 2 \leq y^2$ e dunque $x^2 < y^2$ ovvero $(y - x)(y + x) > 0$. Poiché x e y sono entrambi positivi, deve allora essere $y - x > 0$, cioè $x < y$

(A, B) è dunque una sezione in $\mathbb{R}$. Sia L l'elemento separatore della sezione (la cui esistenza e unicità è garantita dall'assioma di Dedekind). Vogliamo provare che $\sqrt{L} = 2$ cioè che $L > 0$ e $L^2 = 2$.

Sicuramente $L > 0$ perché $1 \in A$ e dunque $L \geq 1 > 0$.

Proviamo che $L^2 = 2$ mostrando che non può essere né $L^2 < 2$ né $L^2 > 2$.

a. Supponiamo, per assurdo, che sia $L^2 < 2$. Considero $x := \dfrac{2 - L^2}{2L + 1}$. Sicuramente $x > 0$, dunque $L + x > L$ e perció $L + x \in B$.
   Inoltre $x < 1$. Infatti $\dfrac{2 - L^2}{2L + 1} < 1$ è equivalente a $2 - L^2 < 2L + 1$, equivalente a sua volta a $L^2 - 1 + 2L > 0$. Questa disuguaglianza è sicuramente vera perché $1 \in A$ e dunque $L^2 \geq L \times 1 \geq 1 \times 1 = 1$. Di conseguenza $L^2 - 1 + 2L \geq 2L > 0$.
   Calcolo

$$\begin{aligned} (L + x)^2 &= L^2 + x^2 + 2Lx < L^2 + x + 2Lx = \\ &= L^2 + (1 + 2L)x = L^2 + (1 + 2L)\frac{2 - L^2}{2L + 1} = 2. \end{aligned} \tag{1}$$

   Dato che $L + x > 0$, la disuguaglianza (1) è in contraddizione con $L + x \in B$.

b. Supponiamo, per assurdo, che sia $L^2 > 2$. Considero $x := \dfrac{L^2 - 2}{2L}$. Sicuramente $x > 0$, dunque $L - x < L$ e perció $L - x \in A$.
   Mostriamo che $L - x > 0$. Infatti

$$L - x = L - \frac{L^2 - 2}{2L} = \frac{2L^2 - L^2 + 2}{2L} = \frac{L^2 + 2}{2L} > 0$$

   Calcolo

$$\begin{aligned} (L - x)^2 &= L^2 + x^2 - 2Lx > L^2 - 2Lx = \\ &= L^2 - 2L\frac{L^2 - 2}{2L} = L^2 - (L^2 - 2) = 2. \end{aligned} \tag{2}$$

   Dato che $L - x > 0$, la disuguaglianza (2) è in contraddizione con $L - x \in A$. $\square$

3 Estremo superiore ed estremo inferiore

3.1 Massimo e minimo

Definizione 3.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ insieme non vuoto. Dico che $M \in \mathbb{R}$ è il* massimo di A *(e scrivo $M = \max A$) se*

1. $M \in A$
2. $x \leq M \quad \forall x \in A$

Esercizio 3.1.1. *Dimostrare che il massimo di un insieme $A \subset \mathbb{R}$, se esiste, è unico.*

Soluzione. Siano M_1 ed M_2 due massimi di A. Si ha

$$M_1 \in A \quad x \leq M_1 \quad \forall x \in A, \tag{3}$$
$$M_2 \in A \quad x \leq M_2 \quad \forall x \in A. \tag{4}$$

Scegliendo $x = M_2$ nella (3) si ha $M_2 \leq M_1$; scegliendo $x = M_1$ nella (4) si ha $M_1 \leq M_2$. Per la proprietà antisimmetrica della relazione d'ordine "$\leq$" in $\mathbb{R}$ deve dunque essere $M_1 = M_2$. □

Analogamente:

Definizione 3.2. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ insieme non vuoto. Dico che $m \in \mathbb{R}$ è il* minimo di A *(e scrivo $m = \min A$) se*

1. $m \in A$
2. $m \leq x \quad \forall x \in A$

Esercizio 3.1.2. *Dimostrare che il minimo di un insieme $A \subset \mathbb{R}$, se esiste, è unico.*

Esercizio 3.1.3. *Dimostrare che ogni sottoinsieme finito A di $\mathbb{R}$ ammette sia massimo che minimo.*

Esempio 3.1. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} \colon 1 \leq x < 2\}$. Proviamo che $1 = \min A$ ma che A non ammette massimo.

Sicuramente $1 \in A$ e $x \geq 1$ per ogni $x \in A$, quindi $1 = \min A$.

Supponiamo, per assurdo, che A ammetta massimo. Indico con M tale massimo. Deve essere $M \in A$, dunque $1 \leq M < 2$. Considero $x = \dfrac{M+2}{2}$. Sicuramente $x \in A$. Infatti

$$1 \leq M < 2 \implies 1 + 2 \leq M + 2 \leq 2 + 2 \implies \frac{3}{2} \leq x < 2.$$

Mostriamo che M non può essere il massimo di A mostrando che $M < x$. Infatti

$$M < 2 \implies M + M < 2 + M \implies \frac{2M}{2} < \frac{2+M}{2}$$

cioè $M < x$. □

Anche se 2 non è il massimo dell'insieme A dell'esempio precedente, è chiaro che 2 svolge un ruolo particolare per tale insieme: 2 è maggiore di qualsiasi elemento di A e nessun reale inferiore a 2 è maggiore di tutti gli elementi di A. Diamo ora alcune definizioni e poi usiamo l'Assioma di Dedekind per formalizzare situazioni di questo genere.

Definizione 3.3. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $y \in \mathbb{R}$. Dico che y è un* maggiorante *di A se*

$$x \leq y \quad \forall x \in A.$$

Proposizione 3.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $M = \max A$. Allora $M \leq y$ $\forall y$ maggiorante di A.*

Dimostrazione. Poiché $M \in A$, se y è maggiorante di A, deve in particolare essere $y \geq M$. $\square$

Definizione 3.4. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $y \in \mathbb{R}$. Dico che y è un* minorante *di A se*

$$x \geq y \quad \forall x \in A.$$

Proposizione 3.2. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $m = \min A$. Allora $m \geq y$ $\forall y$ minorante di A.*

Definizione 3.5. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ insieme non vuoto.*
Dico che A è limitato superiormente *se esiste almeno un maggiorante di A;*
dico che A è limitato inferiormente *se esiste almeno un minorante di A;*
dico che A è limitato *se è sia limitato inferiormente che limitato superiormente.*

Teorema 3.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ insieme limitato superiormente e sia $\mathcal{M}$ l'insieme dei maggioranti di A. Allora $\mathcal{M}$ ammette minimo.*

Dimostrazione. Considero $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}' := \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$. Mostriamo che $\big(\mathcal{M}', \mathcal{M}\big)$ è una sezione di $\mathbb{R}$. $\mathcal{M} \neq \emptyset$ perché A è limitato superiormente. Sia $a \in A$. Allora sicuramente $a - 1 \in \mathcal{M}'$ e dunque $\mathcal{M}' \neq \emptyset$. Sicuramente $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ sono una partizione di $\mathbb{R}$. Rimane da dimostrare che $x \leq y$ $\forall x \in \mathcal{M}'$, $\forall y \in \mathcal{M}$.

Sia $x \in \mathcal{M}'$. Poiché x non è un maggiorante di A, esiste $\overline{a} \in A$ tale che $x < \overline{a}$. D'altra parte y è un maggiorante di A, quindi $a \leq y$ $\forall a \in A$. In particolare $x < \overline{a} \leq y$ cosicché $x < y$.

Per l'assioma di Dedekind 2.1 esiste uno ed un solo $L \in \mathbb{R}$ elemento separatore della sezione $\big(\mathcal{M}', \mathcal{M}\big)$. Proviamo che L è il minimo di $\mathcal{M}$. Per definizione di elemento separatore $L \leq y$ $\forall y \in \mathcal{M}$. Dobbiamo solo provare che $L \in \mathcal{M}$. Supponiamo, per assurdo, che sia $L \in \mathcal{M}'$. Allora esiste $\overline{a} \in A$ tale che $L < \overline{a}$. Considero il numero $\dfrac{L + \overline{a}}{2}$. Sicuramente $L < \dfrac{L + \overline{a}}{2} < \overline{a}$. Dunque $\dfrac{L + \overline{a}}{2} \in \mathcal{M}'$ e $\dfrac{L + \overline{a}}{2} > L$, una contraddizione. $\square$

Analogamente si dimostra la seguente:

Proposizione 3.3. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ insieme limitato inferiormente e sia $\mathcal{N}$ l'insieme dei maggioranti di A. Allora $\mathcal{N}$ ammette massimo.*

Diamo allora le seguenti definizioni.

Definizione 3.6. *Se* $A \subset \mathbb{R}$ *è limitato superiormente, il minimo dei maggioranti di* A *si chiama* estremo superiore di A *e si indica* $\sup A$.

Se $A \subset \mathbb{R}$ *è limitato inferiormente, il massimo dei minoranti di* A *si chiama* estremo inferiore di A *e si indica* $\inf A$.

Esercizio 3.1.4. *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *e sia* $M = \max A$. *Provare che* $M = \sup A$.

Soluzione. Per definizione di massimo $x \leq M \ \forall x \in A$, cioè M è un maggiorante di A. Inoltre, sempre per la definizione di massimo, $M \in A$ e dunque ogni maggiorante y di A deve soddisfare la disuguaglianza $y \geq M$ e dunque M è il minimo dei maggioranti, ovvero l'estremo superiore di A. □

Esercizio 3.1.5. *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *e sia* $m = \min A$. *Provare che* $m = \inf A$.

Proposizione 3.4 (Caratterizzazione dell'estremo superiore)**.** *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *insieme limitato superiormente e sia* $L = \sup A$. *Allora*

1. $a \leq L \quad \forall a \in A$;
2. *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, $x < L$, *esiste* $\overline{a} \in A$ *tale che* $x < \overline{a}$.

Dimostrazione. La prima proprietà dice che L è un maggiorante di A; la seconda che nessun numero minore di L può essere un maggiorante di A e dunque le due proprietà dicono proprio che L è il minimo dei maggioranti. □

Analogamente:

Proposizione 3.5 (Caratterizzazione dell'estremo inferiore)**.** *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *insieme limitato inferiormente e sia* $\ell = \inf A$. *Allora*

1. $a \geq \ell \quad \forall a \in A$;
2. *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, $x > \ell$, *esiste* $\overline{a} \in A$ *tale che* $\overline{a} < x$.

È utile poter parlare di estremo inferiore e di estremo superiore anche per insiemi non limitati: se A non è limitato superiormente si dice che l'estremo superiore di A è $+\infty$ e si scrive $\sup A = +\infty$; se A non è limitato inferiormente si dice che l'estremo inferiore di A è $-\infty$ e si scrive $\sup A = -\infty$.

Osservazione 3.1. $+\infty$ *e* $-\infty$ *NON sono numeri reali.*

4 Assioma di Archimede

L'Assioma di Archimede in realtà è una conseguenza dell'assioma di Dedekind.

Proposizione 4.1. *Dati due numeri reali positivi* a *e* b*,esiste* $n \in \mathbb{N}$ *tale che* $na > b$.

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione per assurdo. Supponiamo esistano a, b reali positivi tali che $na < b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora b è maggiorante dell'insieme $A = \{na \colon n \in \mathbb{N}\}$. Sia dunque L l'estremo superiore di A. Avremo

$$na \leq L \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In particolare

$$(n+1)a \leq L \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

cioè

$$na \leq L - a \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ovvero $L - a$ è un maggiorante di A. Poiché $L - a < L$ e $L = \sup A$, abbiamo una contraddizione. □

Proposizione 4.2. *Siano x, y numeri reali, con $x < y$. Allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.*

Dimostrazione. **1)** Consideriamo prima il caso $0 < x < y$.
Per l'assioma di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n(y - x) > 1. \tag{5}$$

Applicando nuovamente l'assioma di Archimede otteniamo che esiste $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{\overline{k}}{n} \geq x$ e dunque $\frac{k}{n} \geq x$ $\forall k \geq \overline{k}$. Sia $K = \max\left\{k \in \mathbb{N} \colon \frac{k}{n} \leq x\right\}$. Si ha

$$\frac{K}{n} \leq x < \frac{K+1}{n}. \tag{6}$$

Dimostriamo che $\frac{K+1}{n} < y$. Infatti

$$\begin{aligned} & \frac{K+1}{n} = \frac{K}{n} + \frac{1}{n} \leq \\ \text{per (5)} \qquad & < \frac{K}{n} + y - x \leq \\ \text{per (6)} \qquad & \leq x + y - x = y. \end{aligned}$$

Si ha quindi $x < \frac{K+1}{n} < y$.

2) Se $x < 0 < y$ non c'è niente da dimostrare, dato che $0 \in \mathbb{Q}$.

3) Se $x < y < 0$, allora $0 < -y < -x$, dunque, per il punto **1)** esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $-y < q < -x$. Di conseguenza $x < -q < y$, ovvero la tesi poiché $-q \in \mathbb{Q}$. □

Osservazione 4.1. *Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Per il principio di Archimede esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\overline{n}x > 1$ e dunque $nx > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \overline{n}$.*
Fissato $n \geq \overline{n}$ sia $K \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{K}{n} \leq x < \frac{K+1}{n}$. (Basta segliere $K = \max\{k \in \mathbb{N} \colon \frac{k}{n} \leq x\}$). I due razionali $\frac{K}{n}$ e $\frac{K+1}{n}$ approssimano, l'uno per difetto e l'altro per eccesso, il numero reale x con errore inferiore a $\frac{1}{n}$.

5 Intervalli

Siano a, b numeri reali, con $a < b$. Chiamiamo

1. *Intervallo aperto di estremi a e b*, e indichiamo col simbolo (a, b) (o col simbolo $]a, b[$) l'insieme
$$\{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$$
2. *Intervallo chiuso di estremi a e b*, e indichiamo col simbolo $[a, b]$ l'insieme
$$\{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$$
3. *Intervallo semiaperto a sinistra di estremi a e b*, e indichiamo col simbolo $(a, b]$ (o col simbolo $]a, b]$) l'insieme
$$\{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}$$
4. *Intervallo semiaperto a destra di estremi a e b*, e indichiamo col simbolo $[a, b)$ (o col simbolo $[a, b[$) l'insieme
$$\{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$$

In tutti i casi, il numero $b - a$ si chiama *lunghezza dell'intervallo.*
Dato $a \in \mathbb{R}$ chiamiano

1. *Semiretta sinistra aperta di estremo a*, e indichiamo col simbolo $(-\infty, a)$ (o col simbolo $] - \infty, a[$) l'insieme
$$\{x \in \mathbb{R} \colon x < a\}$$
2. *Semiretta destra aperta di estremo a*, e indichiamo col simbolo $(a, +\infty)$ (o col simbolo $]a, +\infty[$) l'insieme
$$\{x \in \mathbb{R} \colon x > a\}$$
3. *Semiretta sinistra chiusa di estremo a*, e indichiamo col simbolo $(-\infty, a]$ l'insieme
$$\{x \in \mathbb{R} \colon x \leq a\}$$
4. *Semiretta destra chiusa di estremo a*, e indichiamo col simbolo $[a, +\infty)$ l'insieme
$$\{x \in \mathbb{R} \colon x \geq a\}$$

In particolare la semiretta dei reali positivi $(0, +\infty)$ si indica col simbolo $\mathbb{R}^+$, la semiretta dei reali negativi $(-\infty, 0)$ si indica col simbolo $\mathbb{R}^-$.

6 Assioma di continuità

Vediamo un procedimento per calcolare, approssimativamente, $L = \sqrt{2}$. Siano $a_1 := 1$, $b_1 := 2$. Poiché $L > 0$, $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$, sicuramente $a_1 \leq L \leq b_1$. Calcolo il punto medio m_1 dell'intervallo $[a_1, b_1] = [1, 2]$:

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Poiché $m_1^2 = \frac{9}{4} > 2$, avremo $m_1 > L$ e dunque $a_1 = 1 \leq L \leq m_1 = \frac{3}{2}$.
Pongo $a_2 = a_1$, $b_2 = m_1$, cioè l'intervallo $[a_2, b_2] = \left[a, \frac{3}{2}\right]$ e ne considero il punto medio

$$m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{5}{4}.$$

Poiché $m_2^2 = \frac{25}{16} < 2$ avremo $m_2 < L$ e dunque $m_2 = \frac{5}{4} \leq L \leq b_2 = \frac{3}{2}$.
Pongo $a_3 = m_2$, $b_3 = b_2$, cioè l'intervallo $[a_3, b_3] = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$ e ne considero il punto medio ......

Ovvero procediamo in questo modo:

$$\begin{aligned}
& a_1 := 1, \quad b_1 := 2 \\
& \text{per } k \geq 1 \\
& \quad m_k := \frac{a_k + b_k}{2} \\
& \quad \text{se } m_k^2 < 2 \text{ pongo } a_{k+1} = m_k, \quad b_{k+1} = b_k, \\
& \quad \text{se } m_k^2 > 2 \text{ pongo } a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = m_k.
\end{aligned}$$

In questo modo si definisce una famiglia di intervalli $[a_k, b_k]$ con le proprietà

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \ldots \sqrt{2} \ldots \leq b_{k+1} \leq b_k \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1,$$
$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$$

L'intuizione ci suggerisce che *dovrebbe essere* $\{\sqrt{2}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$. Questo fatto non è ovvio. Per dimostrarlo è necessario applicare l'assioma di Dedekind, assioma 2.1.

Definizione 6.1 (Intervalli dimezzati)**.** *Dico che una famiglia numerabile di intervalli* $\{[a_k, b_k],\ k \in \mathbb{N}\}$ *è una famiglia di* intervalli dimezzati *se*

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \ldots \leq b_{k+1} \leq b_k \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1,$$
$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k).$$

Teorema 6.1. *Data una famiglia di intervalli dimezzati* $\{[a_k, b_k],\ k \in \mathbb{N}\}$ *esiste uno ed un solo numero reale L che appartiene a tutti gli intervalli.*

Osservazione 6.1. *Il teorema precedente è anche noto come* Assioma di continuità *perché è equivalente all'assioma di Dedekind.*

Dimostrazione. Considero

$$A = \{x \in \mathbb{R} \colon \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } x \leq a_k\}, \qquad B = \mathbb{R} \setminus A.$$

Sicuramente $a_1 \in A$, quindi $A \neq \emptyset$ e $b_1 \in B$, quindi $B \neq \emptyset$. Inoltre, per definizione A e B sono una partizione di $\mathbb{R}$. Mostriamo che (A, B) è una sezione in $\mathbb{R}$. Siano $x \in A$, $y \in B$; devo mostrare che $x \leq y$.
Poiché $x \in A$, esiste $\overline{k}$ tale che $x \leq a_{\overline{k}}$. D'altra parte $y \in B$, quindi $y > a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. In particolare $y > a_{\overline{k}}$ e dunque $x \leq a_{\overline{k}} < y$, da cui $x < y$.

Poiché (A, B) è una sezione di $\mathbb{R}$, per l'assioma di Dedekind 2.1, esiste uno ed un solo reale L elemento separatore della sezione.

Vogliamo provare che

1. $L \in [a_k, b_k]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$,
2. non esiste nessun reale $\lambda \neq L$ tale che $\lambda \in [a_k, b_k]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

1. Supponiamo, per assurdo, che esista $\overline{k} \in N$ tale che $L \notin \left[a_{\overline{k}}, b_{\overline{k}}\right]$. Ci sono due casi
   a) $L < a_{\overline{k}}$. Considero il numero $x = \dfrac{L + a_{\overline{k}}}{2}$. Si ha
   $$L < x < a_{\overline{k}}.$$
   Poiché $x > L$, per definizione di elemento separatore, deve essere $x \in B$. Poiché $x < a_{\overline{k}}$, è $x \in A$ e dunque $x \in A \cap B$. Siamo caduti in contraddizione perché $A \cap B = \emptyset$.
   b) $L > b_{\overline{k}}$. Considero il numero $y = \dfrac{L + b_{\overline{k}}}{2}$. Si ha
   $$b_{\overline{k}} < y < L.$$
   Poiché $y < L$, per definizione di elemento separatore, deve essere $y \in A$. Poiché $y > b_{\overline{k}}$, abbiamo anche $y > a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque $y \in B$. Quindi $y \in A \cap B$. Siamo caduti in contraddizione perché $A \cap B = \emptyset$.
2. Supponiamo per assurdo che esista un reale $\lambda \neq L$, che appartiene a tutti gli intervalli $[a_k, b_k]$.
   Poiché $\lambda \neq L$, dovrà essere $\lambda > L$ o $\lambda < L$. Supponiamo $\lambda > L$. Allora,
   $$a_k \leq L < \lambda \leq b_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$
   dunque
   $$\lambda - L \leq b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

da cui

$$2^k\,(\lambda - L) \leq 2\,(b_1 - a_1) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Poiché $k \leq 2^k$, come si può facilmente dimostrare per induzione, si ha

$$k\,(\lambda - L) \leq 2\,(b_1 - a_1) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Per la proposizione 4.1 (assioma di Archimede) siamo caduti in contraddizione. Nel caso $\lambda < L$ la dimostrazione è del tutto analoga.

$\square$