$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cancel{o(x^3)} \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$a_n = \left| \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{3n^6} + o(n^{-8})\right) + \right.$$

$$\left. + \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2n^2}} + o(n^{-5}) - \cancel{1} + \frac{1}{24n^4} \right|^\alpha$$

$$= \left| \frac{1}{24n^4} + o(n^{-5}) \right|^\alpha = \left(\frac{1}{24n^4} + o(n^{-5}) \right)^\alpha$$

$$\lim_n \frac{a_n}{n^{-4\alpha}} = \frac{1}{24^\alpha}$$

$\Rightarrow \sum a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum n^{-4\alpha} = \sum \frac{1}{n^{4\alpha}}$

$\Rightarrow$ converge per $4\alpha > 1$ $\quad \alpha > \frac{1}{4}$

diverge per $4\alpha \leq 1$ $\quad \alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$

Esercizio 2

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = \underset{a}{3}x^2 + \underset{b}{2}x + \underset{c}{1} \qquad \delta = b^2 - 4ac = 4 - 12 < 0$$

$> 0 \quad \forall x. \quad \Rightarrow f$ è strettamente crescente.

$\Rightarrow f$ è iniettiva

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Per il teorema dei valori intermedi

f è suriettiva.

$g = f^{-1}$. $\quad f(1) = 4 \to g(4) = 1.$

$$g'(4) = \frac{1}{f'(g(4))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3+2+1} = \frac{1}{6}.$$

$$f(10) = 1000 + 100 + 10 + 1 = 1111$$

g è strettamente crescente (in quanto inversa di fun crescente)

$$\Rightarrow \quad g(1000) < g(1111) = 10.$$

Esercizio 3

$$\int \log^2 x \, dx \overset{\text{per parti}}{=} x\log^2 x - \int \cancel{x}\cdot \frac{2\log x}{\cancel{x}}\, dx$$

per parti

$$= x\log^2 x - 2x\log x + \int 2\cancel{x}\,\frac{1}{\cancel{x}}\, dx$$

$$= x\log^2 x - 2x\log x + 2x$$

$$= x\left(\log^2 x - 2\log x + 2\right)$$

Verifica:

$$D\left(x\log^2 x - 2x\log x + 2x\right) = \cancel{\frac{2x\log x}{x}} + \log^2 x - \cancel{\frac{2x}{x}} - \cancel{2\log x} + \cancel{2} = \log^2 x.$$

$$\int_{1/e}^{e} \log^2 x\, dx = \left[x\left(\log^2 x - 2\log x + 2\right)\right]_{1/e}^{e}$$

$$= \left[e(1-2+2) - \frac{1}{e}(1+2+2)\right]$$

$$= e - \frac{5}{e}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_e^x \log^2 t\, dt}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\log^2 x - 2\log x + 2\right) - e}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \log^2 x - 2\log x + 2 - \frac{e}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\log x}_{\to+\infty}\Big[\underbrace{\log x - 2 + \frac{2}{\log x}}_{\to+\infty}\Big] - \underbrace{\frac{e}{x}}_{\to 0}$$

$$= +\infty$$

$$f_n(x) = x^n - e^x$$

$$f_n(1) = 1 - e < 0$$
$$f_n(e) = e^n - e^e > 0 \quad \forall n \geq 4 \quad \Rightarrow \exists\, x \in (1,e) : f_n(x) = 0$$
perchè f_n è continua

$$f_n'(x) = n x^{n-1} - e^x > n - e^e \geq 27 - e^e > 0$$ cioè f_n è monotona strettamente crescente

$$\Rightarrow \exists!\, x = x_n \in (1,e) : \quad f_n(x_n) = 0$$

$$f_n(x_n) = 0 \qquad f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$$

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - e^{x_n} = x_n \cdot x_n^n - e^{x_n} =$$
$$= x_n e^{x_n} - e^{x_n} = (x_n - 1)\, e^{x_n} > 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

Ma f_{n+1} è monotona crescente $\Rightarrow x_n > x_{n+1}$

$$x_n^n = e^{x_n} \Rightarrow x_n = \sqrt[n]{e^{x_n}}$$

$$1 \leq x_n = \sqrt[n]{e^{x_n}} \leq \sqrt[n]{e^{e}} \longrightarrow 1$$

$\Rightarrow$ Per il Teo dei due carabinieri $\exists \lim x_n = 1$