

Analisi Matematica I – CdL Fisica e Astrofisica
Primo Appello - 15 Gennaio 2014

Esercizio 1. Al variare del parametro reale positivo α , determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right|^\alpha$$

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Dimostrare che f è iniettiva e suriettiva. Chiamata $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione inversa di f , trovare $g(4)$ e calcolare $g'(4)$. Dimostrare inoltre che $g(1000) < 10$.

Esercizio 3. Calcolare

$$\int_{\frac{1}{e}}^e \log^2 x \, dx.$$

Calcolare inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_e^x \log^2 t \, dt}{x}.$$

Esercizio 4. Per $n \in \mathbb{N}$ sia

$$f_n(x) = x^n - e^x.$$

- Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 27$ esiste un solo $x_n \in (1, e)$ tale che $f_n(x_n) = 0$.
- Provare che la successione $\{x_n\}_{n \geq 27}$ è monotona decrescente.
- Calcolare $\lim_n x_n$.