
matricola cognome e nome

n. 1

Domanda 1) (max 8 punti) Si lanciano due dadi equilibrati. Se sui due dadi esce lo stesso numero, si lanciano 4 monete. Se non esce lo stesso numero ma la somma è un numero pari, si lanciano 3 monete.

In tutti gli altri casi si lanciano 2 monete.

La probabilità che esca testa, su ciascuna moneta, è $p \in [0, 1]$. Calcolare la probabilità che nel lancio delle monete escano esattamente due teste.

Sapendo che nel lancio delle monete sono uscite esattamente due teste, calcolare la probabilità che sui due dadi sia uscito lo stesso numero.

$$\mathbb{P}_1 = \frac{p^2}{2} (5 - 6p + 2p^2),$$

$$\mathbb{P}_2 = \frac{2(1 - p^2)}{5 - 6p + 2p^2}$$

Svolgimento

Domanda 2) (max 12 punti) Le v.a. X e Y sono congiuntamente continue con densità congiunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (x, y) \in [0, 2] \times [0, 1], \\ \frac{1}{3} & (x, y) \in [0, 2] \times [1, 2], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare funzione di ripartizione, densità e media della v.a. $Z := X + Y$.

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{12} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{2t-1}{12} & 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{12} (-11 + 10t - t^2) & 2 \leq t < 3 \\ 1 - \frac{(4-t)^2}{6} & 3 \leq t < 4 \\ 1 & t \geq 4. \end{cases}, \quad f_Z(t) = \begin{cases} \frac{t}{6} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \leq t < 2 \\ \frac{5-2t}{6} & 2 \leq t < 3 \\ \frac{4-t}{3} & 3 \leq t < 4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}, \quad \mathbb{E}[Z] = \frac{5}{6}$$

Svolgimento

Domanda 3) (max 10 punti) La v.a. X è bernoulliana di parametro p . La v.a. Y è distribuita sugli interi non negativi. Inoltre

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k|X = 0) &= q(1 - q)^k \\ \mathbb{P}(Y = k|X = 1) &= q^k(1 - q)\end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Calcolare la densità e la media della v.a. Y .

$$\mathbb{P}(Y = k) = q^k p(1 - q) + q(1 - p)(1 - q)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \mathbb{E}[Y] = \frac{pq^2 + (1 - p)(1 - q)^2}{q(1 - q)}$$

Svolgimento