Metodi Matematici e Probabilistici - B046 –2012-2013

Sesto Appello – 9 Luglio 2013

matricola **cognome e nome** **n. 1**

Domanda 1) (max 8 punti) Si hanno due urne, ciascuna delle quali contiene 5 palline bianche e 5 palline nere. Si estraggono due palline dalla prima urna e senza guardarle le si immettono nella seconda urna.

Si estraggono ora due palline dalla seconda urna. Calcolare la probabilità che siano entrambe bianche.

Sapendo che le due palline estratte dalla seconda urna sono entrambe bianche, calcolare la probabilità che le palline estratte dalla prima urna e introdotte nella seconda fossero entrambe bianche.

$\mathbb{P}_1 = \frac{137}{594}$, $\mathbb{P}_2 = \frac{42}{137}$.

Svolgimento

Domanda 2) (max 14 punti) Le v.a. X_1, X_2 e X_3 sono indipendenti e seguono la distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Calcolare le densità delle v.a.

$$S_2 := X_1 + X_2, \quad \overline{X}_2 := \frac{S_2}{2}, \quad S_3 := X_1 + X_2 + X_3, \quad \overline{X}_3 := \frac{S_3}{3}.$$

Suggerimento: Scrivere S_3 come $S_3 = S_2 + X_3$.

$f_{S_2}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda^2 x \exp(-\lambda x) & x > 0 \end{cases}$, $\quad f_{\overline{X}_2}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 4\lambda^2 x \exp(-2\lambda x) & x > 0 \end{cases}$, $\quad f_{S_3}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\lambda^3 x^2}{2} \exp(-\lambda x) & x > 0 \end{cases}$,
$f_{\overline{X}_3}(x) \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{27}{2} \lambda^3 x^2 \exp(-3\lambda x) & x > 0 \end{cases}$.

Svolgimento

Domanda 3) (max 10 punti) Le variabili aleatorie X e Y sono entrambe distribuite sull' insieme $\{0,1,2\}$. La densità congiunta di (X,Y) è rappresentata in tabella:

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$Y=1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$
$Y=2$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

Calcolare la densità, la media e la varianza della v.a. $Z := XY$.

densità $\begin{array}{c} p_0 = \frac{19}{36} \\ p_1 = p_4 = \frac{1}{9}, \\ p_2 = \frac{1}{4} \end{array}$ $\mathbb{E}[Z] = \dfrac{19}{18},$ $\mathrm{Var[Z]} = \dfrac{575}{324}$.

Svolgimento

Domanda 4) (max 10 punti) Una ditta produce viti. Il diametro delle viti, misurato in millimetri è una v.a. gaussiana di media $\mu_D = 3$ e deviazione standard $\sigma_D = 0.5$.

Il passo delle viti, misurato in millimetri è una v.a. gaussiana di media $\mu_P = 1$ e deviazione standard $\sigma_P = 0.2$.

Le viti possono essere immesse sul mercato se il loro diametro è compreso tra 2.8 e 3.2 mm e se il loro passo è compreso tra 0.95 e 1.05 mm.

Supponendo che diametro e passo siano indipendenti, calcolare la percentuale di viti che possono essere immesse sul mercato, esprimendola in termini della funzione di ripartizione della distribuzione gaussiana standard.

$\mathbb{P} = (2\Phi(0.4) - 1)\,(2\Phi(0.25) - 1)$.

Svolgimento