Metodi Matematici e Probabilistici - B046 –2012-2013

Terzo Appello – 19 Febbraio 2013

n. 1

Domanda 1) (max 2 punti) Un'urna contiene 6 palline bianche e 4 palline rosse.
Si lancia una moneta. La probabilità di ottenere testa è $p \in (0, 1)$. Se esce testa estraggo 2 palline, se esce croce estraggo 4 palline. Calcolare la probabilità che le palline bianche estratte siano 2.

Sapendo che le palline bianche estratte sono 2, calcolare la probabilità di aver ottenuto testa nel lancio della moneta.

$\frac{9-2p}{21}$, $\qquad$ $\frac{7p}{9-2p}$.

Svolgimento

Domanda 2) (max 4 punti) Le v.a. X e Y sono congiuntamente continue con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} 4\max\{x,y\} & (x,y) \in T, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

Determinare

- la funzione di ripartizione F_Z e la densità f_Z della v.a. $Z = X + Y$
- la media e la varianza della v.a. Z.

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^3 & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}, \qquad f_Z(t) = \begin{cases} 3t^2 & t \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad \mathrm{E}[Z] = \frac{3}{4}, \qquad \mathrm{Var}[Z] = \frac{3}{80} \qquad .$$

Svolgimento

Domanda 3) (max 4 punti) X e Y sono v.a. indipendenti sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. X segue la distribuzione geometrica di parametro $p \in (0,1)$, mentre Y segue la distribuzione geometrica di parametro $q \in (0,1)$. Determinare l'immagine e la media della v.a. $Z := X + Y$.
Determinare la densità discreta della v.a. Z nei casi $p \neq q$ e $p = q$.

$$Z(\Omega) = \{k \in \mathbb{N} \colon k \geq 2\}; \qquad \mathrm{E}[Z] = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \qquad \mathbb{P}(Z = k) = \begin{cases} \dfrac{pq(1-q)^{k-1}}{p-q}\left((1-q)^{k-1} - (1-p)^{k-1}\right) & \text{se } p \neq q \\ p^2(k-1)(1-p)^{k-2} & \text{se } p = q \end{cases}.$$

Svolgimento