$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\sin(x)) - \cos(x) - \sin(x) - \sin(x^2)}{\ln(1+\tan(x)) - \alpha x}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + O(t^4)$$

$$e^{\sin(x)} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(x + O(x^3)\right)^3 + O(x^4) =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + O(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$

$$\sin(x^2) = x^2 + O(x^6)$$

$$\Rightarrow \text{Numeratore} = \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4)$$

$$\ln(1+\tan(x)) = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5) - \frac{1}{2}\left(x + O(x^3)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(x + O(x^3)\right)^3 + O(x^4)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + O(x^4)$$

$$\text{Denominatore} = (1-\alpha)x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

Il numeratore è un infinitesimo del 3° ordine

Il denominatore è un infinitesimo del 1° ordine se $\alpha \neq 1$

2° ordine se $\alpha = 1$

In ogni caso quindi il limite è zero.

$$f : x \in (0,+\infty) \longmapsto x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2+2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \left(x - \sqrt{x^2+2}\right) \frac{x+\sqrt{x^2+2}}{x+\sqrt{x^2+2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2}{x+\sqrt{x^2+2}} = 0$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{x^2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+2} - x^3}{x^2\sqrt{x^2+2}} \gtrless 0$$

sse $\quad (x^2-1)\sqrt{x^2+2} - x^3 \gtrless 0 \qquad (x^2-1)\sqrt{x^2+2} \gtrless x^3$

1) $x \in (0,1) \Rightarrow$ vale l'ultimo segno: $f'(x) < 0$

2) $x \geq 1 \Rightarrow$ disuguaglianza tra quantità non negative, elevo al quadrato

$$f'(x) \gtrless 0 \iff (x^2-1)^2(x^2+2) \gtrless x^6$$

$$(x^4 - 2x^2 + 1)(x^2+2) \gtrless x^6$$

$$\cancel{x^6} - \cancel{2x^4} + x^2 + \cancel{2x^4} - 4x^2 + 2 \gtrless \cancel{x^6}$$

$$2 - 3x^2 \gtrless 0 \qquad x^2 \lessgtr \frac{2}{3}$$

Ma siamo nel caso $x \geq 1 \Rightarrow x^2 > \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) < 0$,

$\Rightarrow f$ è monotona strettamente decrescente in $(0,+\infty)$

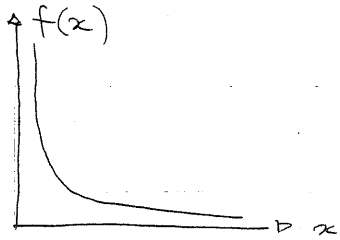
$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{\sqrt{x^2+2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} =$$

$$= \frac{2}{x^3} - \frac{\cancel{x^2} + 2 - \cancel{x^2}}{(x^2+2)^{3/2}} = 2\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x^2+2)^{3/2}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{(x^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2+2)^{3/2}}\right)$$

Ma $\quad x^2 < x^2+2 \Rightarrow \left(x^2\right)^{3/2} < (x^2+2)^{3/2} \Rightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow f$ è convessa in $(0, +\infty)$



$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

$F(1) = 0$ $\qquad F'(x) = f(x) > 0$

$\qquad\qquad F''(x) = f'(x) < 0$

$\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\infty$ perchè $x - \sqrt{x^2+2}$ è limitata in $(0, 1)$ ma $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln(x) \to -\infty$ per $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \left(t + \frac{1}{t} - \sqrt{t^2+2}\right)dt$$

$$t - \sqrt{t^2+2} = \frac{\cancel{t^2} - \cancel{t^2} - 2}{t + \sqrt{t^2+2}}$$

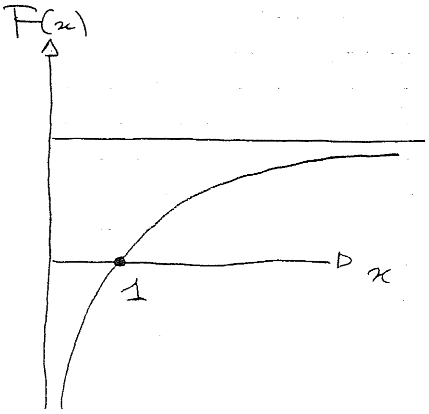
$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{t} - \frac{2}{t+\sqrt{t^2+2}} = \frac{\sqrt{t^2+2} - t}{t\left(t+\sqrt{t^2+2}\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{t^2} + 2 - \cancel{t^2}}{t\left(t+\sqrt{t^2+2}\right)^2}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^{-3}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2\cancel{t^3}}{\cancel{t^3}\left(1+\sqrt{1+t^{-2}}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Poichè $\int_1^{+\infty} t^{-3}\,dt$ converge, anche $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

dunque $\exists$ finito $\lim_{x\to+\infty} F(x)$



Si può calcolare esplicitamente $F(x)$

$$F(x) = \int_1^x \left(t + \frac{1}{t} - \sqrt{t^2+2}\right) dt = \left(t + \ln(t)\right)\Big|_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \sqrt{t^2+2}\, dt$$

$$= x - 1 + \ln(x) - \int_1^x \sqrt{t^2+2}\, dt$$

Calcolo $\int_1^x \sqrt{t^2+2}\, dt$ $\qquad t = \sqrt{2}\sinh(s)$

$$dt = \sqrt{2}\cosh(s)\, ds$$

$$t^2+2 = 2\left(\sinh^2(s)+1\right) = 2\cosh^2(s)$$

$$\sqrt{t^2+2} = \sqrt{2}\cosh(s)$$

$$\frac{e^s - e^{-s}}{2} = \frac{t}{\sqrt{2}} \qquad e^s = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t + \sqrt{t^2+2}\right)$$

$$\frac{e^s + e^{-s}}{2} = \frac{\sqrt{t^2+2}}{\sqrt{2}} \qquad s = \ln\left(t + \sqrt{t^2+2}\right) - \ln(\sqrt{2})$$

$t = 1 \quad s = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})$

$t = x \quad s = \ln(x + \sqrt{x^2+2}) - \ln(\sqrt{2})$

$$\int_{\ln(1+\sqrt{3})-\ln(\sqrt{2})}^{\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\ln(\sqrt{2})} \sqrt{2}\cosh(s)\sqrt{2}\cosh(s)\, ds = \frac{1}{2}\int_{\ln(1+\sqrt{3})-\ln(\sqrt{2})}^{\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\ln(\sqrt{2})} (e^s + e^{-s})^2\, ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\ln(1+\sqrt{3})-\ln(\sqrt{2})}^{\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\ln(\sqrt{2})} \left(e^{2s} + e^{-2s} + 2\right) ds =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2s} - e^{-2s} + 2s\right)\Big|_{s=\ln((1+\sqrt{3})/\sqrt{2})}^{s=\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^2 - \frac{2}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^2} + 2\ln\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{2\cdot 2}{(1+\sqrt{3})^2} + 2\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{1+4\sqrt{k}}$$

Pongo $y = x^2$ ($\Rightarrow y \geq 0$)

Ottengo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y^k$ con $a_k = \frac{(-1)^k}{1+4\sqrt{k}}$

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{1+4\sqrt{k}}{1+4\sqrt{k+1}} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+4\right)}{\cancel{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+4\sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)} = 1$$

La serie converge se $y \in [0,1)$

Non converge se $y > 1$

Per $y = 1$ ottengo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+4\sqrt{k}}$

E' una serie a segni alterni $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ con $b_k = \frac{1}{1+4\sqrt{k}} > 0$

Poichè $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{1+4\sqrt{k}} = 0$ e $b_{k+1} \leq b_k$, (*)

la serie converge

(*) Infatti $\sqrt{k+1} > \sqrt{k} \Rightarrow \frac{1}{1+4\sqrt{k+1}} < \frac{1}{4\sqrt{k}}$

$\Rightarrow$ La serie in y converge $\forall y \in [0,1]$ (non ci interessa cosa succede per $y < 0$) e non converge per $y > 1$

$\Rightarrow$ La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{1+4\sqrt{k}}$ converge $\forall x \in [-1,1]$

Devo trovare anche l'insieme in cui converge assolutamente cioè l'insieme in cui converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k x^{2k}}{1+4\sqrt{k}}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{1+4\sqrt{k}}$$

Sappiamo che nell'intervallo aperto $(-1,1)$ c'è sicuramente anche convergenza assoluta (proprietà delle serie di potenze)

Rimane da vedere cosa succede per $x^2 = 1$

In questo caso ho $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\sqrt{k}}$.

Poiché $\lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+4\sqrt{k}}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{1}{4} \neq 0$ e $\sum \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$,

abbiamo che $\sum \frac{1}{1+4\sqrt{k}} = +\infty$

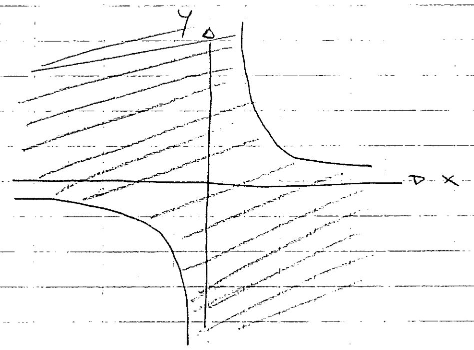
Concludendo

INSIEME DI CONVERGENZA $[-1,1)$

INSIEME DI CONVERGENZA ASSOLUTA $(-1,1)$

$f(x,y) = \exp(xy) + x^2 - y^2$

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1 \}$



Estremi liberi: $f_x = y\exp(xy) + 2x$

$f_y = x\exp(xy) - 2y$

$\nabla f(x,y) = (0,0)$ sse $\begin{cases} y\exp(xy) + 2x = 0 \\ x\exp(xy) - 2y = 0 \end{cases}$

Se $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \overset{\in A}{} $ è soluzione ed è l'unica soluzione sull'asse y

Se $x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \exp(xy) = \frac{2y}{x} \\ y\frac{2y}{x} + 2x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \exp(xp) = \frac{2y}{x} \\ 2y^2 + 2x^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ NON AMMETTE SOLUZIONI

$\Rightarrow$ L'unico pto critico è $O = (0,0)$

Calcolo la matrice hessiana in tale punto

$f_{xx} = y^2\exp(xy) + 2 \qquad f_{xx}(0,0) = 2$

$f_{xy} = f_{yx} = \exp(xy) + xy\exp(x,y) \qquad f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 1$

$f_{yy} = x^2\exp(xy) - 2 \qquad f_{yy}(0,0) = -2$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det H_f(0,0) = -4 - 1 < 0$

$\Rightarrow$ La matrice hessiana ha due autovalori discordi
e dunque l'origine è un punto di sella

Su ∂A $\quad x \neq 0 \Rightarrow$ posso scrivere $\partial A = \{(x,y) : y = \frac{1}{x} \quad x \neq 0\}$

$$f\left(x, \frac{1}{x}\right) = e + x^2 - \frac{1}{x^2}$$

Pongo $g(x) := f\left(x, \frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow$ $g : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto e + x^2 - \frac{1}{x^2}$ funzione pari

$$g'(x) = 2x + \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3}(x^4 + 1)$$

$\Rightarrow$ g' è strettamente negativa per $x < 0$
" positiva per $x > 0$

In particolare non si annulla mai e dunque
non esistono estremi per $f|_{\partial A}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y(1-\cos(x))}{x^2+25y^2}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

$$\left| \frac{5y(1-\cos(x))}{x^2+25y^2} \right| = \frac{\left| 5y\left(\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) \right|}{x^2+25y^2}$$

$$(x \pm 5y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+25y^2 \pm 10xy \geq 0$$

$$\Rightarrow |10xy| \leq x^2+25y^2 \Rightarrow$$

$$\leq \frac{\frac{1}{4}\left| 10xy\left(x + O(x^3)\right)\right|}{x^2+25y^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \frac{\cancel{(x^2+25y^2)}\,|x+O(x^3)|}{\cancel{x^2+25y^2}} =$$

$$= \frac{1}{4}|x+O(x^3)| \leq \frac{1}{2}|x| \quad \text{per } (x,y)\to(0,0)$$

Poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|x| = 0$,

anche $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y(1-\cos(x))}{x^2+25y^2} = 0$