1 Testo

Esercizio 1.1. Al variare del parametro reale positivo α calcolare, se esiste, il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2)\,(3^x-1)-\ln(3)\,(2^x-1)}{(\cos(\pi x))^\alpha}$$

Esercizio 1.2. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-|x-1|} & |x|>2\\ \sin(\pi x) & -2\le x<0\\ x2^{-x} & 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Sia $F(x):=\displaystyle\int_1^{2x} f(t)\mathrm{d}t$. Tracciare il grafico di F e indicare esplicitamente

1. Il dominio di F;
2. l'insieme dei punti di discontinuità di F;
3. gli eventuali asintoti di F;
4. l'insieme dei punti di non derivabilità di F, specificando la loro natura;
5. gli intervalli di monotonia di F;
6. gli intervalli di convessità / concavità di F;
7. l'immagine di F.

Esercizio 1.3. Sia $f(x,y)=x^2+4y^2+x+8y+21$ e $\Gamma: xy-x-1=0$. Trovare i punti di massimo e minimo di f vincolati a Γ.

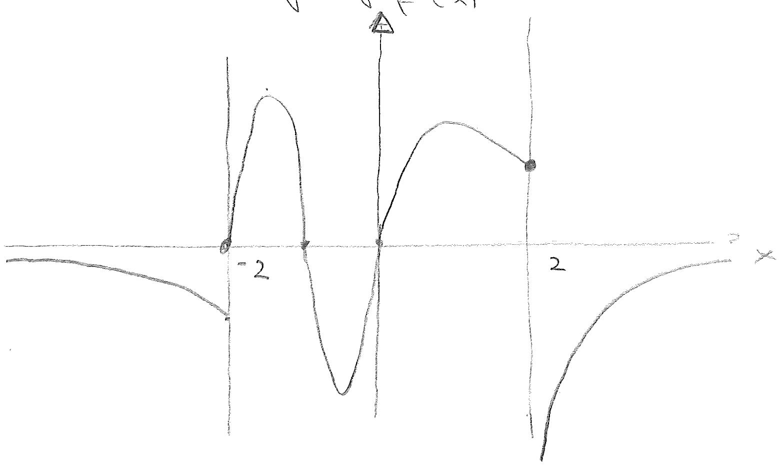
Esercizio 1.4. Sia $g=x^2-x+y^3-y$. Trovare le direzioni $\underline{n}$ per le quali la derivata direzionale di g secondo $\underline{n}$ in $(0,0)$ è massima e minima.

Possiamo scrivere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < -2 \\ \sin(\pi x) & -2 \leq x < 0 \\ x2^{-x} & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2-x} & x > 2 \end{cases}$$

$F(x) := \int_1^{2x} f(t)\,dt \implies F$ è definita in un intervallo contenente $x_0 = \frac{1}{2}$

Traccio il grafico di $f(x)$:



$g: x \to x2^{-x}$

$g(0) = 0 \quad g(2) = \frac{1}{2}$

$g'(x) = 2^{-x} - x2^{-x}\ln(2)$

$= 2^{-x}(1 - x\ln(2))$

$0 \quad \frac{1}{\ln(2)} \quad 2$

1) Devo integrare $f(t)$ tra 1 e $2x \implies 2x \leq 2 \implies x \leq 1$

$$\implies D(F) = (-\infty, 1]$$

2) F è una funzione integrale dunque è continua in tutto il suo dominio

3) L'unico eventuale asintoto può essere per $x \to -\infty$

Ma $\forall x$ t.c. $2x < -2$ cioè per ogni $x < -1$ abbiamo

$$F(x) = \int_1^{2x} f(t)dt = \int_1^{-2} f(t)\,dt + \int_{-2}^{2x} f(t)dt =$$

$$= F(-1) + \int_{-2}^{2x} \frac{1}{t}dt = F(-1) + \ln|t| \Big|_{t=-2}^{t=2x}$$

$$= F(-1) + \ln(2|x|) - \ln(2) = F(-1) + \ln(-x)$$

Dunque $\lim_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$ ma $\lim_{x \to -\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

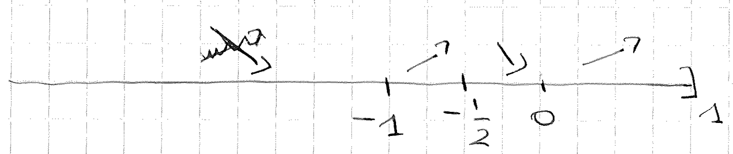
cioè NON c'è asintoto, né orizzontale né obliquo.

4) Poiché $F'(x) = 2f(2x)$ se f è continua in $2x$, gli eventuali pt. di non derivabilità sono solo i pti x t.c. $2x = -2$ cioè solo il pto $x = -1$

Poiché in $x = -2$ f ha una discontinuità di salto, F ha un pto angoloso in $x = -1$

5) $F'(x) = 2f(2x)$ > 0 $\quad -2 < 2x < -1 \ \vee \ 0 < 2x < 2$

< 0 $\quad 2x < -2 \ \vee \ -1 < 2x < 0$



$F'(x) > 0 \qquad x \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, 1)$

$F'(x) < 0 \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$

$F'(0) = 0$

$F'(-1)$ NON ESISTE

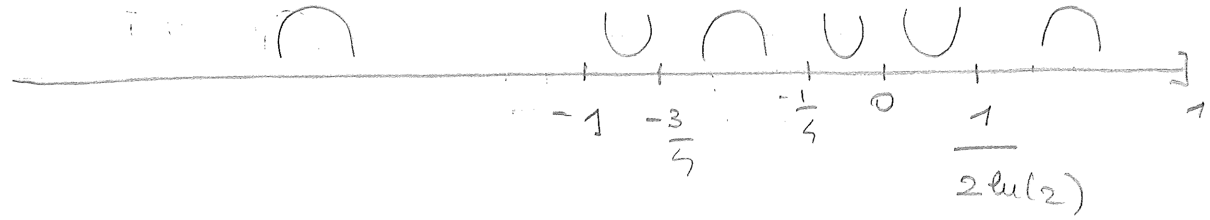
6) $F''(x) = 4f'(2x)$

$$f'(x) = \begin{cases} -x^{-2} & x < -2 \\ \pi\cos(\pi x) & -2 < x < 0 \\ 2^{-x}(1 - x\ln(2)) & 0 < x < 2 \end{cases}$$

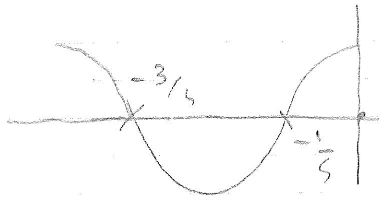
$$F''(x) = \begin{cases} -4(2x)^{-2} & 2x < -2 \\ 4\pi\cos(2\pi x) & -2 < 2x < 0 \\ 4 \cdot 2^{-2x}(1 - 2x\ln(2)) & 0 < 2x < 2 \end{cases}$$

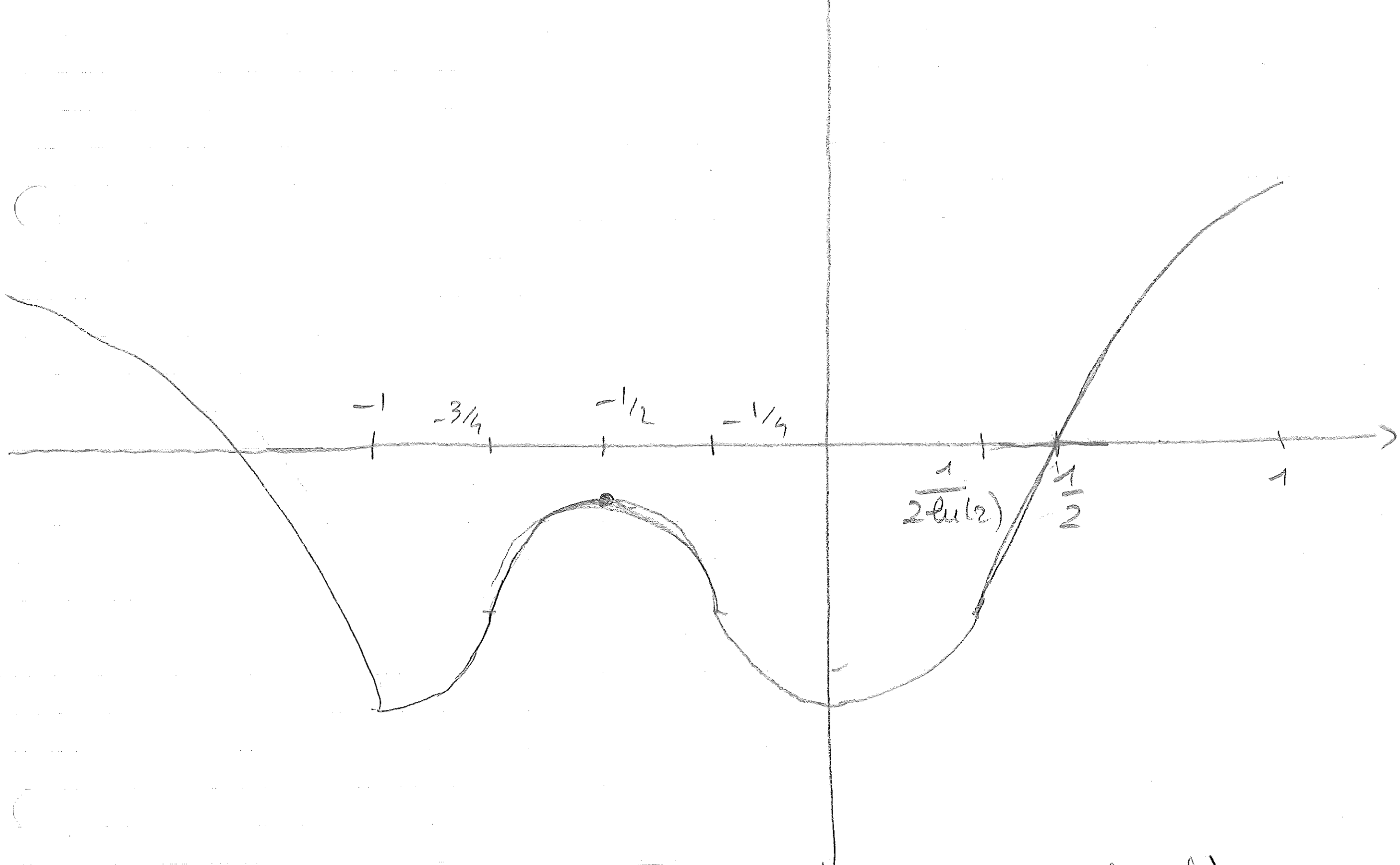
!!

$$= \begin{cases} -x^{-2} & x < -1 \\ 4\pi\cos(2\pi x) & -1 < x < 0 \\ 4\,2^{-2x}(1 - 2x\ln(2)) & 0 < x < 1 \end{cases}$$



$\cos(2\pi x)$ $\quad x\in(-1,0)$





7): $D(F)$ è connesso, F è continua $\Rightarrow$ anche l'immagine di F è connessa

Poiché $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=+\infty$, abbiamo $\sup\limits_{x\in D(F)} F(x)=+\infty$

Il minimo di F è assunto in 0 o in -1:

$$F(0)=\int_1^0 f(t)\,dt=\int_1^0 t2^{-t}\,dt=\int_1^0 t\exp(-t\ln(2))\,dt=$$

$$=t\,\frac{\exp(-t\ln(2))}{-\ln(2)}\Bigg|_{t=1}^{t=0}+\int_1^0\frac{1}{\ln(2)}\exp(-t\ln(2))\,dt=$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \exp(-\ln(2)) + \frac{1}{(\ln(2))^2} \exp(-t\ln(2)) \Big|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{(\ln(2))^2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{\ln(2)-1}{2(\ln(2))^2}$$

$$F(-1) = \int_1^{-2} f(t)dt = \int_1^0 f(t)dt + \int_0^{-2} \sin(\pi t)dt =$$

$$= F(0) + \frac{-1}{\pi}\cos(\pi t)\Big|_{t=0}^{t=-2} = F(0) + 0 = \frac{\ln(2)-1}{2(\ln(2))^2}$$

$$\Rightarrow \min F = F(0) = F(1) = \frac{\ln(2)-1}{2(\ln(2))^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(F) = \left[\frac{\ln(2)-1}{2(\ln(2))^2}, +\infty\right)$$

N.B. $1 < 2 < e \Rightarrow 0 < \ln(2) < 1 \Rightarrow F(0) = F(1) < 0$