**n. 70**

**Domanda 1)** Al variare del parametro reale positivo $\alpha$calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^\alpha)}{\sqrt{1+\sin(x)}-1}$$

**Motivare adeguatamente la risposta**

---

**Domanda 2)** Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & x < 0 \\ \cos(\pi x) & 0 \le x \le 1 \\ \frac{x}{2+|x-2|} & x > 1. \end{cases}$$

Sia $F(x) := \displaystyle\int_0^{|x|} f(t)\mathrm{d}t$. Tracciare il grafico di $F$ e indicare esplicitamente

1. Il dominio di $F$;
2. eventuali simmetrie di $F$;
3. l'insieme dei punti di discontinuità di $F$;
4. gli eventuali asintoti di $F$;
5. l'insieme dei punti di non derivabilità di $F$, specificando la loro natura;
6. gli intervalli di monotonia di $F$;
7. gli intervalli di convessità / concavità di $F$;
8. l'immagine di $F$.

**Motivare adeguatamente la risposta**

---

**Domanda 3)** Sia $\Gamma$ la curva $2x^2 + y^3 = 1$. Determinare i punti su $\Gamma$ che distano meno dall'origine.
**Motivare adeguatamente la risposta**

**Domanda 4)** Verificare che per la curva

$$\Gamma : x^2 - 2x^4 + y^2 - 1 = 0$$

sono verificate le ipotesi del teorema del Dini nel punto $P_0 = (0, 1)$.
Sia $y = g(x)$ la curva che esplicita la $\Gamma$ in un intorno di $P_0$.
trovare la derivata seconda di $g$ nel punto $P_0$.
**Motivare adeguatamente la risposta**

---

## Non scrivere nella zona sottostante

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x^\alpha)}{\sqrt{1+\sin(x)} - 1}$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$$

$$\sin(x^\alpha) = x^\alpha + O(x^{3\alpha})$$

$$\left(1+\sin(x)\right)^{1/2} = \left(1 + x + O(x^3)\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(x + O(x^3)\right) + O(x^2)$$

$$\frac{\sin(x^\alpha)}{\sqrt{1+\sin(x)} - 1} = \frac{x^\alpha + O(x^{3\alpha})}{\frac{1}{2}x + O(x^2)}$$

1) $\alpha \in (0,1)$

$$\frac{x^\alpha + O(x^{3\alpha})}{x^\alpha\left(\frac{1}{2}x^{1-\alpha} + O(x^{2-\alpha})\right)} = \frac{1 + O(x^{2\alpha})}{\frac{1}{2}x^{1-\alpha} + O(x^{2-\alpha})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x^\alpha)}{\sqrt{1+\sin(x)} - 1} = +\infty$$

2) $\alpha = 1$

$$\frac{x + O(x^2)}{x\left(\frac{1}{2} + O(x)\right)} = \frac{1 + O(x)}{\frac{1}{2} + O(x)}$$

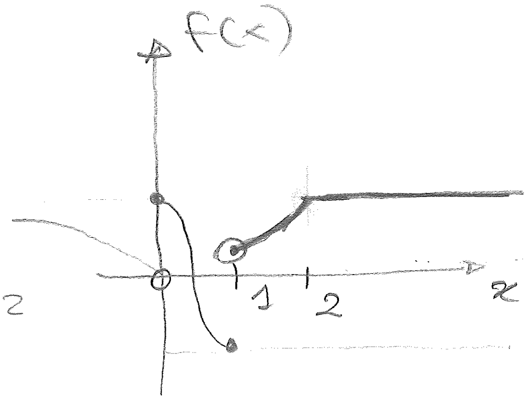
$$\Rightarrow \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\sin(x)} - 1} = 2$$

3) $\alpha > 1$

$$\frac{x\left(x^{\alpha-1} + O(x^{3\alpha-1})\right)}{x\left(\frac{1}{2} + O(x^2)\right)} = \frac{x^{\alpha-1} + O(x^{3\alpha-1})}{\frac{1}{2} + O(x^2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x^\alpha)}{\sqrt{1+\sin(x)} - 1} = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & x<0 \\ \cos(\pi x) & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x}{4-x} & 1 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$




1) Poiché f è limitata e continua a tratti in $\mathbb{R}$, abbiamo

$$\mathcal{D}(F) = \mathbb{R}$$

2) $F(-x) = \displaystyle\int_0^{|-x|} f(t)dt = \int_0^{|x|} f(t)dt = F(x) \Rightarrow$ <u>$F$ è PARI</u>

3) F è una funzione integrale, quindi è continua in tutto il suo dominio, cioè $F \in C^0(\mathbb{R})$.

4) F non può avere asintoti verticali

Osserviamo poi che, per ogni $x > 2$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt + \int_2^x f(t)dt =$$

$$= F(2) + \int_2^x 1\, dt$$

$$\Rightarrow \forall x > 2 \quad F(x) = x + F(2) - 2 \quad \text{lineare}$$

Dunque, per $x \to +\infty$ ho l'asintoto obliquo

$$y = x + F(2) - 2$$

Per simmetria, per $x \to -\infty$ ho l'asintoto obliquo

$$y = -x + F(2) - 2$$

$$F(2) = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 \cos(\pi t)dt + \int_1^2 \frac{t}{4-t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\Big|_{t=0}^{t=1} + \int_1^2 \left(-1 + \frac{4}{4-t}\right)dt =$$

$$= 0 + \left(-t - 4\ln|t-4|\right)\Big|_{t=1}^{t=2} =$$

$$= -2 - 4\ln(2) + 1 + 4\ln(3) = 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1$$

$\Rightarrow$ per $x \to +\infty$ asintoto obliquo $y = x + 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 3$

per $x \to -\infty$ asintoto obliquo $y = -x + 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 3$

5) Se $x > 0$ e se $f$ è derivabile in $x$ abbiamo

$$F'(x) = f(x)$$

Se $x < 0$ e se $f$ è derivabile in $x$ abbiamo

$$F'(x) = -f(-x)$$

$f$ è discontinua in $x = 1$ $\Rightarrow$

$F$ è non derivabile in $x = 1$ e $x = -1$

Per $x = 0$?

$$\lim_{x \to 0+} F'(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \cos(\pi x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0-} F'(x) = \lim_{x \to 0-} -f(-x) =$$

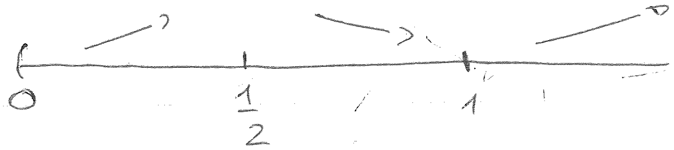
$$= \lim_{x \to 0-} -\cos(-\pi x) = -1 \neq 1$$

$\Rightarrow F$ non è derivabile in $x = 0$

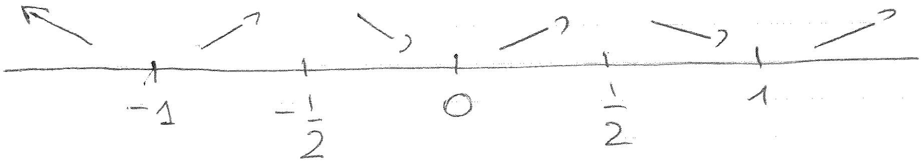
In tutti e tre i pti, poiché f è limitata, ho un pto angoloso.

6) Studio il segno della derivata prima, dove esiste

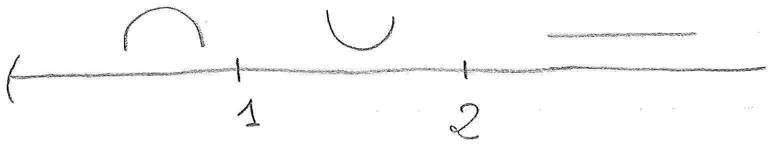
Per $x>0$



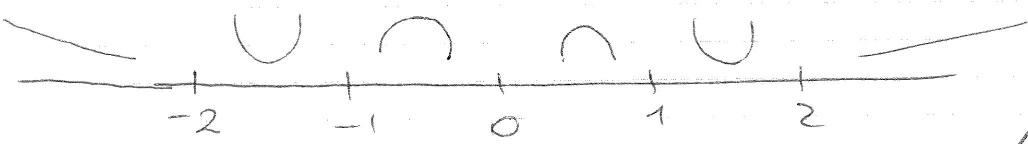

Per simmetria

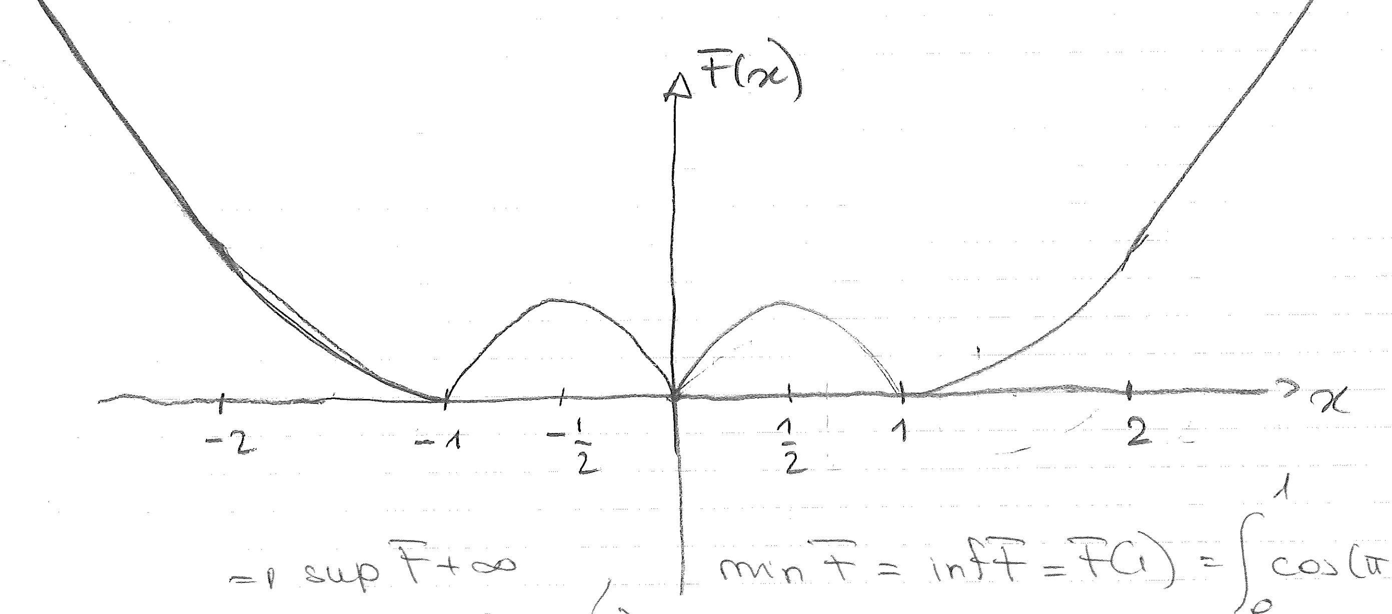



7) Per $x>0$ $\quad F''(x) = f'(x) = \begin{cases} -\pi \sin(\pi x) & 0<x<1 \\ \dfrac{4}{(x-4)^2} & 1<x<2 \\ 0 & x>2 \end{cases}$




Per simmetria




$\Rightarrow \sup F + \infty$ $\qquad \min F = \inf F = F(1) = \int_0^1 \cos(\pi t)\,dt = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im} F = [0, +\infty)$