1 Analisi Matematica I – Terzo Appello – 13 Luglio 2011

Esercizio 1.1. Al variare del parametro $n \in \mathbb{N}$ calcolare, se esiste, il seguente limite,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{\sin(3x)}{3}}{x^n \left(3\ln\left(1+\frac{x}{3}\right) - \frac{\ln(1+3x)}{3}\right)}$$

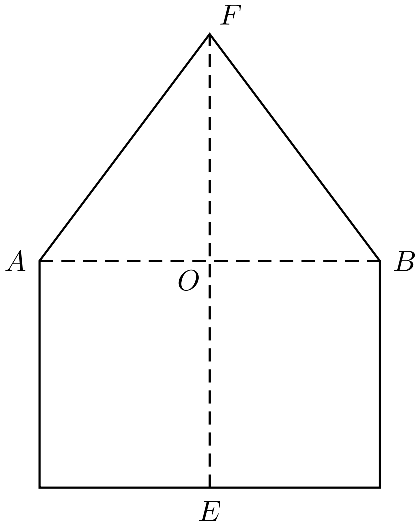
Esercizio 1.2. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arcsin\left(1 - |x|^{2/3}\right).$$

Indicare esplicitamente

1. Il dominio I della funzione;
2. il dominio J della derivata prima ed il suo comportamento agli estremi di J;
3. l'immagine di f.

Esercizio 1.3. Volendo progettare una busta come in figura, di perimetro assegnato 8, con $\overline{OF} = \overline{OE}$, $\overline{AO} = \overline{OB}$, si calcoli l'Area massima che la busta può avere.



Esercizio 1.4. Calcolare la derivata direzionale secondo $\cos\theta \underline{i} + \sin\theta \underline{j}$ nel punto $(0,0)$ della funzione

$$\frac{x^2+xy}{y^2+xy}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{3}\sin(3x)}{x^n\left(3\ln\left(1+\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{3}\ln(1+3x)\right)}$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$$

$$3\sin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{3}\sin(3x) = 3\left(\cancel{\frac{x}{3}} - \frac{1}{6}\frac{x^3}{27} + o(x^4)\right) - $$

$$- \frac{1}{3}\left(\cancel{3x} - \frac{\cancel{27}^{9}}{\cancel{6}_{2}} x^3 + o(x^4)\right)$$

$$= \frac{-x^3}{54} + \frac{3}{2}x^3 + o(x^4)$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{54}\right)x^3 + o(x^4) = \frac{40}{27}x^3 + o(x^4)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$3\ln\left(1+\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{3}\ln(1+3x) =$$

$$= 3\left(\cancel{\frac{x}{3}} - \frac{x^2}{18} + o(x^2)\right) - \frac{1}{3}\left(\cancel{3x} - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{6} + \frac{3}{2}\right)x^2 + o(x^2) = \frac{4}{3}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{40}{27}x^3 + o(x^4)}{x^n\left(\frac{4}{3}x^2 + o(x^2)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\frac{40}{27} + o(x)\right)}{x^{n+2}\left(\frac{4}{3} + o(1)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{1-n}\left(\frac{40}{27} + o(x)\right)}{\frac{4}{3} + o(1)} =$$

$0 \qquad n = 0$

$\frac{\cancel{40}^{10}}{\cancel{27}_{9}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} = \frac{10}{9} \qquad n = 1$

$+\infty \qquad n > 1$ dispari

Non esiste $\qquad n > 1$ pari

$$f(x) = \arcsin\left(1 - |x|^{2/3}\right)$$

<u>Dominio</u> $\quad -1 \le 1 - |x|^{2/3} \le 1 \qquad -2 \le -|x|^{2/3} \le 0$

$$0 \le |x|^{2/3} \le 2 \qquad 0 \le |x| \le 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$$

$$x \in \left[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right]$$

La funzione è pari $\Rightarrow$ la studio in $[0\ 2\sqrt{2}]$

$f(0) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$f(2\sqrt{2}) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^{2/3})^2}} \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-1/3} =$

$f(x) = 0$ SSE

$1 - x^{2/3} = 0$

SSE $x = 1$

~~f' è definita in $(0, 2\sqrt{2})$ per $x>0$ e~~

dunque $\quad \mathrm{Dom}(f') = (-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$

$\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2\sqrt{2}-} f'(x) = -\infty$

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 2\sqrt{2})$

$$f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-1/3}\left(1-(1-x^{2/3})^2\right)^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}\left(1-(1-x^{2/3})^2\right)^{-1/2} + \right.$$

$$\left. + x^{-1/3}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(1-(1-x^{2/3})^2\right)^{-3/2}(\cancel{-2})(1-x^{2/3})\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{9}x^{-4/3}\left(1-(1-x^{2/3})^2\right)^{-3/2}\left\{1-(1-x^{2/3})^2 + \frac{2}{3}x^{2/3}(1-x^{2/3})\right\}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9} x^{-4/3} \left(1 - \left(1-x^{2/3}\right)^2\right)^{-3/2} \left\{ \cancel{1} - \cancel{1} - x^{4/3} + 2x^{2/3} + 2x^{2/3} - 2x^{4/3} \right\}$$

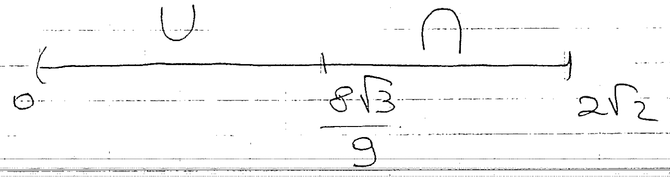
$$= \frac{2}{9} x^{-4/3} \left(1 - \left(1-x^{2/3}\right)^2\right)^{-3/2} \left(x^{2/3} \left(4 - 3x^{2/3}\right)\right) \gtrless 0$$

$$4 - 3x^{2/3} \gtrless 0 \qquad x^{2/3} \lessgtr \frac{4}{3} \qquad 0 < x \lessgtr \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{9} < 2\sqrt{2} \quad \text{SSE} \quad 2\sqrt{2}\sqrt{6} < 9 \quad \text{SSE}$$

$$4 \cdot 2 \cdot 6 < 81 \quad \text{SSE} \quad 48 < 81 \quad \text{vero}$$



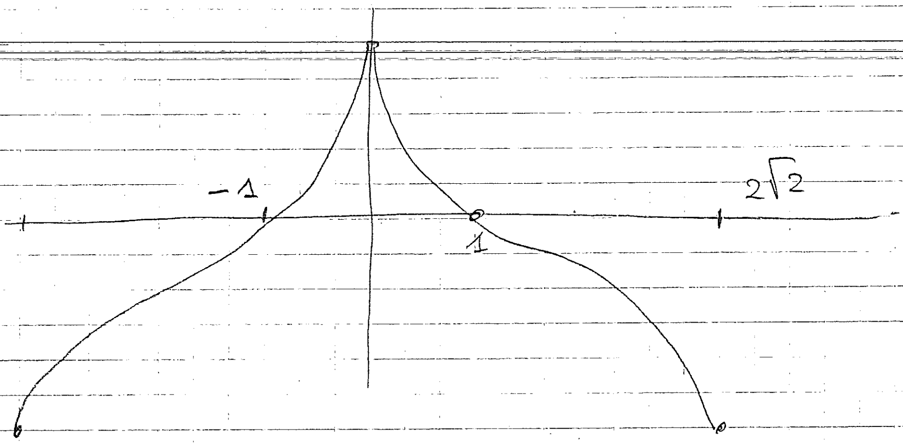
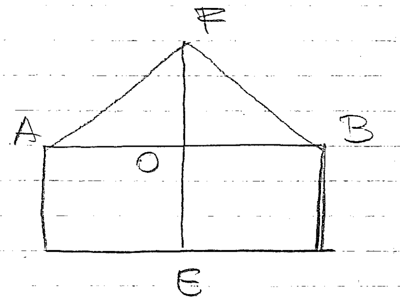


Immagine $= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Il Massimo assoluto è assunto in $x = 0$

Il minimo assoluto è assunto in $x = 2\sqrt{2}$ e $x = -2\sqrt{2}$



Perimetro $= 16$

Siano $x = \overline{OA} = \overline{OB}$

$y = \overline{OE} = \overline{OF}$

Perimetro $= 16 \Leftrightarrow 2\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}\right) = 16$

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2} = 8$$

Il vincolo $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, x+y+\sqrt{x^2+y^2}=8\right\}$

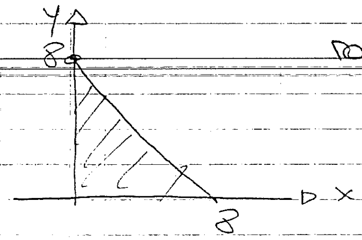
è un insieme chiuso e limitato

Infatti $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=8 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 8-(x+y)$

$\Rightarrow \quad 8-x-y\geq 0$

Dunque il vincolo è contenuto nella regione

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ y\leq 8-x \end{cases}$$



rappresentata in figura

Inoltre il vincolo è un chiuso perché x, y e $x+y+\sqrt{x^2+y^2}$ sono funzioni continue.

$$F(x,y,\lambda) = 3xy - \lambda\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}-8\right)$$

$$F_x = 3y - \lambda - \frac{\lambda x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$F_y = 3x - \lambda - \frac{\lambda y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$F_\lambda = -\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}-8\right)$$

$$\begin{cases} 3y - \lambda = \dfrac{\lambda x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 3x - \lambda = \dfrac{\lambda y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 8 - (x+y) \end{cases}$$

Se $x=0$ o $y=0 \Rightarrow f(x,y)=0 \Rightarrow$ lavoro in

$x>0,\ y>0,\ x+y<8$

$$\begin{cases} \dfrac{3y-\lambda}{x} = \dfrac{3x-\lambda}{y} \\ 3x - \lambda = \dfrac{\lambda y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 8-(x+y) \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} &3y^2 - \lambda y = 3x^2 - \lambda x \\ &3(y^2-x^2) = \lambda(y-x) \\ &3(y-x)(y+x) = \lambda(y-x) \end{aligned}$$

1 $y=x$ 2 $\lambda = 3(y+x)$

1) $y=x \Rightarrow (3x-\lambda) = \dfrac{\lambda x}{x\sqrt{2}}$

$x\sqrt{2} = 8-2x \qquad x = 4\sqrt{2} - x\sqrt{2}$

$x(1+\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \qquad x = \dfrac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} =$

$= 4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$

$\Rightarrow f(x,y) = 3\left(4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\right)^2 =$

$= 3\cdot 32\,(2+1-2\sqrt{2}) =$

$= 96\,(3-2\sqrt{2})$

2) $\lambda = 3(x+y) \Rightarrow \underbrace{\cancel{3x} - \cancel{3x} - 3y}_{\text{negativo}} = \underbrace{\dfrac{3(x+y)y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{positivo}}$

$\Rightarrow$ IMPOSSIBILE

Dunque l'Area max è $96\,(3-2\sqrt{2})$ ed è ottenuta

sse $x=y=4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$

$$f(x,y) = \frac{x^2+xy}{y^2+xy}$$

$$\begin{cases} x = t\cos(\theta) \\ y = t\sin(\theta) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$g(t) = f(t\cos(\theta), t\sin(\theta)) = \frac{t\cos(\theta)\left(\cancel{t\cos(\theta)+t\sin(\theta)}\right)}{t\sin(\theta)\left(\cancel{t\sin(\theta)+t\cos(\theta)}\right)}$$

$$= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

La funzione è costante rispetto a $t \Rightarrow g'(0) = 0$