1 Analisi Matematica I – Secondo Appello – 29 Giugno 2011

Esercizio 1.1. Al variare del parametro $n \in \mathbb{N}$ calcolare, se esiste, il seguente limite,

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\ln(\cos(x)) + \sin(x^2)}{x^n}$$

Esercizio 1.2. Al variare del parametro $n \in \mathbb{N}$ calcolare, se esiste, il seguente limite,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \exp(x) + 1}{x^n}$$

Esercizio 1.3. Al variare del parametro $n \in \mathbb{N}$ calcolare, se esiste, il seguente limite,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \sqrt{1-x}}{x^n}$$

Esercizio 1.4. Al variare del parametro $n \in \mathbb{N}$ calcolare, se esiste, il seguente limite,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin(x)) - \sin(x)}{x^n}$$

Esercizio 1.5. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$$

indicando esplicitamente

1. il dominio della funzione;
2. il comportamento della funzione agli estremi del suo dominio;
3. l'immagine della funzione.

Esercizio 1.6. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

indicando esplicitamente

1. il dominio della funzione;
2. il comportamento della funzione agli estremi del suo dominio;
3. l'immagine della funzione.

Esercizio 1.7. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$$

indicando esplicitamente

1. il dominio della funzione;
2. il comportamento della funzione agli estremi del suo dominio;
3. l'immagine della funzione.

Esercizio 1.8. Tracciare il grafico della funzione

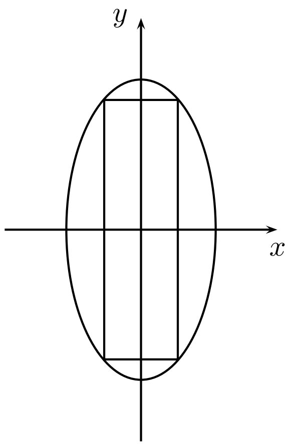
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\ln(x)}$$

indicando esplicitamente

1. il dominio della funzione;
2. il comportamento della funzione agli estremi del suo dominio;
3. l'immagine della funzione.

Esercizio 1.9. Calcolare l'Area del più grande rettangolo iscritto, come in figura, nell'ellisse

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$



Esercizio 1.10. Trovare l'insieme A dei valori del parametro reale a per i quali la funzione

$$f(x, y) = x + y - ax^2 + y^2 - 4xy$$

è strettamente convessa.

Se $a \in A$, è vero che ogni punto critico per f è un suo punto di minimo?

Esercizio 1.11. Calcolare l'insieme di convergenza e l'insieme di convergenza assoluta della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{3^n n \ln(n)}$$

1.1 $$\lim_{x \to 0} \frac{2\ln(\cos(x)) + \sin(x^2)}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6) = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6)\right)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^4)$$

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^4)\right)^2$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + o(x^6)$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^5)$$

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^6)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{x^2} - \frac{1}{6}x^4 + \cancel{x^2} + o(x^6)}{x^n} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^n}\left(-\frac{1}{6} + o(x^2)\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} x^{4-n}\left(-\frac{1}{6} + o(x^2)\right)$$

1) $4-n>0$ cioè $n=1,2,3$, il limite è 0

2) $4-n=0$ cioè $n=4$, il limite è $-\frac{1}{6}$

3) $4-n<0$ cioè $n>4$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} n>4, \ n \text{ pari, il limite è } -\infty \\ n>4, \ n \text{ dispari, il limite non esiste} \end{cases}$$

1.2. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - e^{x} + 1}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)$$

$$(1-x)^{1/2} = (1+(-x))^{1/2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{\frac{x}{2}} - \cancel{\frac{x^2}{8}} - \cancel{1} + \cancel{\frac{x}{2}} + \cancel{\frac{x^2}{8}} - \cancel{1} - \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + \cancel{1} + O(x^3)}{x^n}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2\left(-\frac{1}{2} + O(x)\right)}{x^n} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x^{2-n}\left(-\frac{1}{2} + O(x)\right)$$

1) $2-n > 0$ cioè $n = 1$, il limite è 0

2) $2-n = 0$ cioè $n = 2$, il limite è $-\frac{1}{2}$

3) $+2-n < 0$ cioè $n > 2$ $\Rightarrow$

$n > 2$, n pari, il limite è $-\infty$

$n > 2$, n dispari, il limite non esiste

1.3 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \sqrt{1-x}}{x^n}$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3)$$

$$(1-x)^{1/2} = (1+(-x))^{1/2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{\frac{x}{2}} + \frac{3}{8}x^2 - \cancel{1} + \cancel{\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{8} + O(x^3)}{x^n}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + O(x)\right)}{x^n}$$

$$= \lim_{x \to 0} x^{2-n}\left(\frac{1}{2} + O(x)\right)$$

1) $2-n>0$ cioè $n=1$, il limite è 0

2) $2-n=0$ cioè $n=2$, il limite è $\frac{1}{2}$

3) $2-n<0$ cioè $n>2 \Rightarrow$

$n>2$, n pari, il limite è $+\infty$

$n>2$, n dispari, il limite non esiste

1.4 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sin(x)) - \sin(x)}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4)$$

$$\ln(1+\sin(x)) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - \frac{1}{2}\left(x + O(x^3)\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3}\left(x + O(x^3)\right)^3 + O(x^4)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) - \cancel{x} + \frac{x^3}{6}}{x^n}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2\left(-\frac{1}{2} + O(x)\right)}{x^n}$$

$$= \lim_{x \to 0} x^{2-n}\left(-\frac{1}{2} + O(x)\right)$$

1) $2-n > 0$ cioè $n = 1$, il limite è 0
2) $2-n = 0$ cioè $n = 2$, il limite è $-\frac{1}{2}$
3) $2-n < 0$ cioè $n > 2$ $\Rightarrow$

$n > 2$, n pari, il limite è $-\infty$
$n > 2$, n dispari, il limite non esiste

1.5 $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$

Dominio $\quad (0,1) \cup (1,+\infty)$

$f(x) > 0 \qquad x > 1$

$f(x) = 0 \qquad$ IMPOSSIBILE

$f(x) < 0 \qquad x \in (0,1)$

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\left(\text{forma indeterminata } \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{ Hopital } \dfrac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}x^{1/2} \to +\infty \right)$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}\,\ln(x)} = 0 \quad \nexists$ AS. OBLIQUO

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^{-1/2}\ln(x) - x^{1/2}\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{\ln(x) - 2}{2(\ln(x))^2 x^{1/2}} \gtrless 0$

$x \neq 1, \quad \ln(x) \gtrless 2$

$x \neq 1 \quad x \gtrless e^2$

$\searrow \quad 1 \quad \searrow \quad e^2 \quad \nearrow$

$f''(x) = \dfrac{1}{2}\left\{ \dfrac{\frac{1}{x}x^{1/2}(\ln(x))^2 + (2-\ln(x))\left(2\ln(x)\frac{1}{x}x^{1/2} + x^{-1/2}(\ln(x))^2\right)}{x(\ln(x))^4} \right\}$

$= \dfrac{8 - (\ln(x))^2}{4x^{3/2}(\ln(x))^3} \quad ; \quad 8 - (\ln(x))^2 = 0$

$\ln(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{cases}$

$\cup \quad \exp(-2\sqrt{2}) \quad \cap \quad 1 \quad \cup \quad \exp(2\sqrt{2}) \quad \cap$

$f(e^2) = \frac{e}{2}$

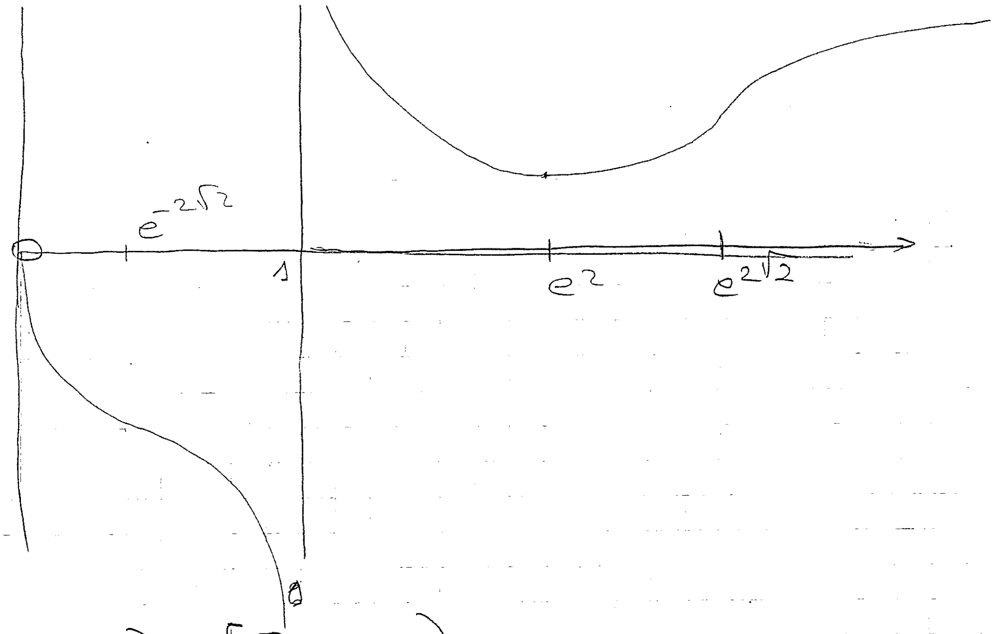


Immagine $= (-\infty, 0) \cup \left[\frac{e}{2}, +\infty\right)$

1.6 $\qquad f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

Dominio $(0, +\infty)$

$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{forma indeterminata } \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \\ \text{Hopital } \dfrac{x^{-1}}{\frac{1}{2} x^{-1/2}} = 2x^{-1/2} \to 0 \end{array} \right)$

$f(x) > 0 \qquad x > 1$

$f(x) = 0 \qquad x = 1$

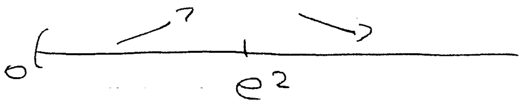
$f(x) < 0 \qquad x \in (0, 1)$

$f(x) = x^{-1/2} \ln(x)$

$f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2} \ln(x) + x^{-1/2} \frac{1}{x} =$

$= \frac{1}{2} x^{-3/2} \left(2 - \ln(x) \right) \gtrless 0 \qquad \ln(x) \lesseqgtr 2$

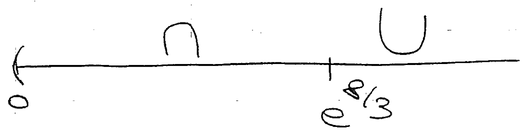
$x \lesseqgtr e^2$



$f''(x) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{3}{2} x^{-5/2} \left(2 - \ln(x) \right) + x^{-3/2} \cdot \frac{-1}{x} \right\} =$

$= \frac{1}{4} x^{-5/2} \left(3 \ln(x) - 8 \right) \gtrless 0$

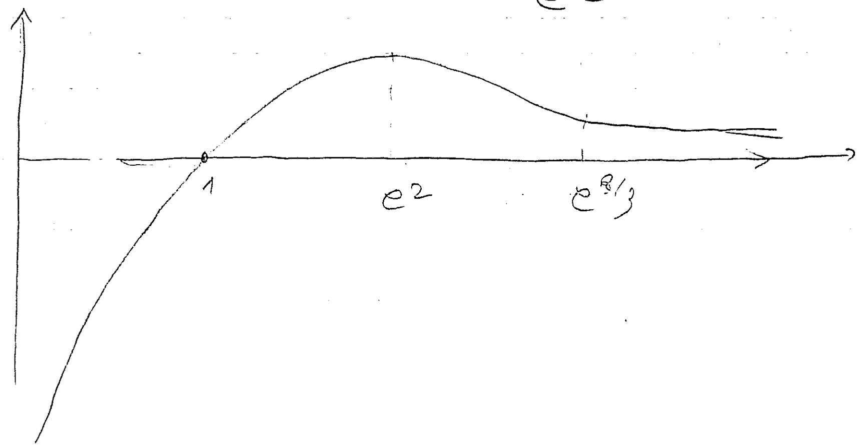
$\ln(x) \gtrless \frac{8}{3} \qquad x \gtrless e^{8/3}$



$f(e^2) = \frac{2}{e}$

Immagine =

$\left(-\infty, \frac{2}{e}\right]$



1.7 $\qquad f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$

Dominio $\quad (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \left(\begin{array}{l} \text{forma indeterminata } \frac{\infty}{\infty} \\ \text{Hopital } \dfrac{2x}{\frac{1}{x}} = 2x^2 \to +\infty \end{array} \right)$$

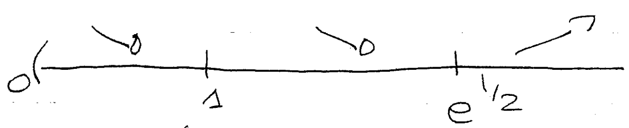
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \cancel{+\infty}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty \qquad \left(\begin{array}{l} \text{forma indeterminata } \frac{\infty}{\infty} \\ \text{Hopital } \dfrac{1}{1/x} = x \to +\infty \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ Non c'è asintoto obliquo

$$f'(x) = \frac{2x\ln(x) - x^2 \frac{1}{\cancel{x}}}{(\ln(x))^2} = \frac{x(2\ln(x)-1)}{(\ln(x))^2} \gtrless 0$$

$$2\ln(x) - 1 \gtrless 0 \qquad \ln(x) \gtrless \frac{1}{2} \qquad x \gtrless e^{1/2}$$

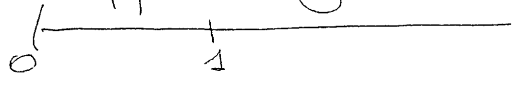


$$f''(x) = \frac{\left(2\ln(x) - 1 + x\frac{2}{\cancel{x}}\right)(\ln(x))^2 - x(2\ln(x)-1)\,2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x))^4}$$

$$= \frac{2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2}{(\ln(x))^3}$$

$2t^2 - 3t + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 16 < 0$ $\qquad \Rightarrow$ il numeratore di $f''(x)$ è sempre positivo



$f(e^{1/2}) = 2e$

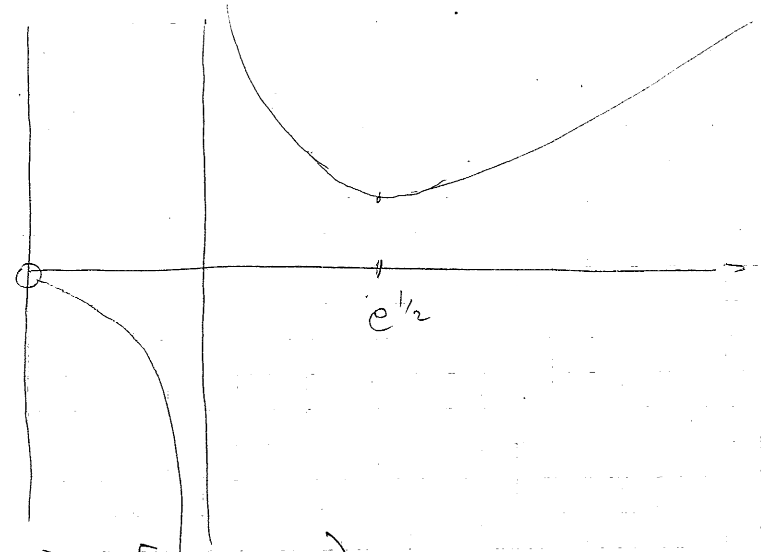


Immagine $(-\infty, 0) \cup [2e, +\infty)$

1.8 $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,\ln(x)}$

Dominio $\quad (0,1) \cup (1,+\infty)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

forma indeterminata $\dfrac{1}{0 \cdot \infty} \Rightarrow$

$\dfrac{x^{-1/2}}{\ln(x)}$ indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$

$\Rightarrow$ Hopital $\dfrac{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}{x^{-1}} = -\dfrac{1}{2}x^{-1/2} \to -\infty$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

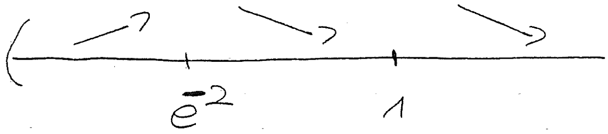
$f(x) > 0 \qquad x > 1$

$f(x) = 0 \qquad$ IMPOSSIBILE

$f(x) < 0 \qquad x \in (0,1)$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}x^{-1/2}\ln(x) - x^{1/2}\frac{1}{x}}{x(\ln(x))^2} = \frac{-(\ln(x)+2)}{2x^{3/2}(\ln(x))^2} \gtrless 0$$

$\ln(x)+2 \lesseqgtr 0 \quad \ln(x) \lesseqgtr -2 \quad x \lesseqgtr e^{-2}$



$$f''(x) = \frac{1}{2}\left\{\frac{-\frac{1}{x}x^{3/2}(\ln(x))^2 + (\ln(x)+2)\left(\frac{3}{2}x^{1/2}(\ln(x))^2 + x^{3/2}\,2\,\frac{\ln(x)}{x}\right)}{x^3(\ln(x))^4}\right\}$$

$$= \frac{3(\ln(x))^2 + 8\ln(x) + 8}{4x^{5/2}(\ln(x))^3}$$

$3t^2 + 8t + 8 = 0$

$\dfrac{\Delta}{4} = 16 - 24 > 0$

$f(e^{-2}) = \frac{-e}{2}$

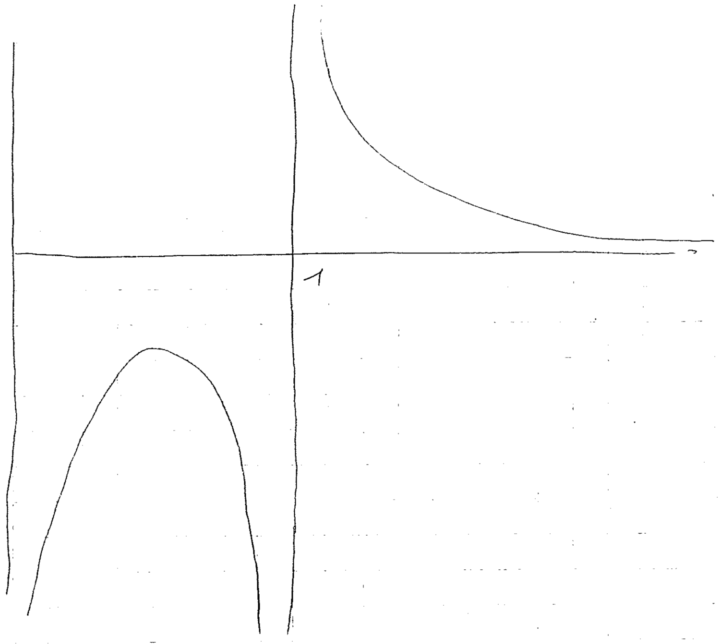


Immagine $\left(-\infty, -\frac{e}{2}\right] \cup (0, +\infty)$

1.9 Detto (x,y) il vertice del rettangolo che giace nel 1° quadrante, abbiamo

$$\text{Area} = 4xy = f(x,y)$$

che dobbiamo studiare sull'insieme

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$$

Possiamo parametrizzare A come

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = 2\sin(t) \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

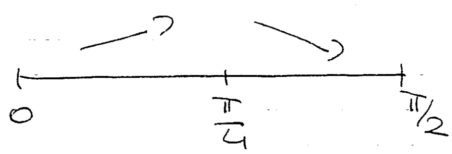
$$g(t) := f(\cos(t), 2\sin(t)) = 8\cos(t)\sin(t) = 4\sin(2t)$$

Dobbiamo studiare dunque

$$g : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto 4\sin(2t) \in \mathbb{R}$$

$$g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$g'(t) = 8\cos(2t)$$



$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$$

1.10 $\quad f(x,y) = x + y - ax^2 + y^2 - 4xy$

$f_x(x,y) = 1 - 2ax - 4y$

$f_y(x,y) = 1 + 2y - 4x$

$f_{xx}(x,y) = -2a$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -4$

$f_{yy}(x,y) = 2$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2a & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(x,y) = -4a - 16 = -4(a+4)$

$\operatorname{tr} H_f(x,y) = -2a + 2$

$$\begin{cases} -4(a+4) > 0 \\ -2a + 2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 4 < 0 \\ 2a < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < -4 \\ a < 1 \end{cases} \iff \boxed{a < -4}$$

$A = (-\infty, -4)$

Se $a \in A$ ogni eventuale pto critico di f è un pto di minimo perché la matrice hessiana in quel pto è definita positiva

1.11 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{3^n n \ln(n)}$

$y = x^2 \geq 0$ $\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^n}{3^n n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n y^n$

$a_n := \frac{(-1)^n}{3^n n \ln(n)}$

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{3^n n \ln(n)}{3^{n+1}(n+1)\ln(n+1)} \right| = \frac{n \ln(n)}{(n+1)\ln(n+1)} \cdot \frac{1}{3}$

$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$

la serie converge assolutamente ~~e~~

$\forall y \in [0,3)$ cioè $\forall x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

e NON converge se $y > 3$ cioè se $|x| > \sqrt{3}$

Per $y = 3$ abbiamo:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^n n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$$

La serie converge assolutamente se la serie

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ converge

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln(\ln(x)) \Big|_{x=2}^{x\to+\infty} = +\infty ;$$

$f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ è monotone decrescente con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow$ Per il criterio dell'integrale $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge

$\Rightarrow$ INSIEME DI CONVERGENZA ASSOLUTA ~~...~~ $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ è una serie a segni alterni e la successione

$b_n := \frac{1}{n\ln(n)}$ è monotona decrescente, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

quindi per il criterio di Leibniz la serie converge

$\Rightarrow$ INSIEME DI CONVERGENZA $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$