

Primo compitino di Analisi I – Compito A

Corso di Laurea in Ingegneria dell'ambiente e del territorio, A.A. 1998–1999

Prof. Vespri

3 novembre 1998

1. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy tratteggiare la parte di piano corrispondente alle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} y \geq \frac{x}{2} \\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \\ x + y < 2 \end{cases}$$

2. Risolvere le seguenti disequazioni in \mathbb{R}

$$\frac{\log\left(\frac{\epsilon}{2} + \left|x - \frac{\epsilon}{2}\right|\right)}{x^2 - 1} \geq 0; \quad \frac{\cos^2 x}{1 - 2 \sin x} > \frac{\sin x}{2}$$

3. Determinare le seguenti radici in

$$\sqrt[3]{-2 + i2\sqrt{3}}; \quad \sqrt[5]{-i}$$

4. Risolvere le seguenti equazioni nel campo complesso

$$iz^3 = 1 - \frac{i^3}{1-i}; \quad z = |z|\bar{z}i$$

5. Ridurre in forma polare

$$\frac{(1+i)^3}{(1-i\sqrt{3})^2}$$

6. Dimostrare per induzione la seguente disuguaglianza

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \frac{4}{n+4}$$

7. Calcolare, se esiste, il limite della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n - a_n^2 \end{cases}$$

8. Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 3n^2 + 1} - \sqrt{n^3 + 3n^2 + n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n} - \sqrt{n}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{2n+1}{n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n + 20};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \right); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\cdots+n}}.$$

9. Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2}{n}}{\cos \frac{1}{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 7n^6}{(n^3 + 1)(6n^4 - n^2)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n! + 5}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^4}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{2^{3n}}.$$