

**Programma di Analisi Matematica 1 e 2**  
**Università di Firenze - Facoltà di Ingegneria**  
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica M-Z  
a.a. 2012/2013 - Prof. M.Patrizia Pera  
(Ultimo aggiornamento: 28/05/13)

## **Numeri**

Insiemi (unione, intersezione, differenza, insieme vuoto, complementare). Numeri naturali, relativi, razionali. I numeri reali: assiomi algebrici, ordinamento. Quantificatori logici. Disuguaglianze. Valore assoluto. Potenze e radici. Logaritmi. Intervalli. Massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo inferiore e superiore di un insieme. Proprietà di completezza dei reali. Proprietà di Archimede. Densità dei razionali. Applicazioni tra insiemi, applicazioni iniettive, suriettive, biiettive. Dominio, codominio, immagine e grafico di una applicazione.

## **Funzioni reali di una variabile (limiti e continuità)**

Funzioni reali di variabile reale. Funzioni limitate. Funzioni monotone. Funzioni inverse. Polinomi e funzioni razionali. Principali funzioni trascendenti (funzioni esponenziali e logaritmiche, funzioni trigonometriche e loro inverse, funzioni iperboliche). La funzione parte intera. Elementi di topologia della retta reale: intorno di un punto, punti di accumulazione, punti isolati. Massimi e minimi assoluti e relativi. Limiti delle funzioni (finiti e infiniti). Teorema di unicità del limite. Teorema della permanenza del segno. Teorema dei carabinieri. Teorema sulle operazioni per il calcolo dei limiti. Forme indeterminate. Limite destro e sinistro. Limite di funzione composta. Cambiamento di variabile nei limiti. Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone. Limiti fondamentali e conseguenze. Continuità. Teorema di continuità delle funzioni combinate (somma, prodotto, quoziente e composizione). Classificazione delle discontinuità. Teorema degli zeri. Teorema dei valori intermedi e applicazioni. Teorema di continuità di una funzione inversa. Teorema di Weierstrass.

## **Funzioni reali di una variabile (derivate)**

Definizione di derivata. Derivata destra e sinistra. Punti angolosi. Interpretazione geometrica della derivata. Differenziale. Regole di derivazione (somma, prodotto, quoziente, composizione e funzione inversa). Derivate

delle principali funzioni. Teorema di Fermat. Teoremi di Rolle e Lagrange. Conseguenze del Teorema di Lagrange. Teoremi di de L'Hopital. Derivate di ordine superiore. Asintoti di una funzione. Funzioni convesse in un intervallo. Condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi e minimi relativi. Punti di flesso. Studi di funzione. Infinitesimi e infiniti. Il simbolo o-piccolo. Formula di Taylor col resto nella forma di Peano. Formula di Taylor col resto nella forma di Lagrange. Formula di MacLaurin. Applicazioni della formula di Taylor al calcolo dei limiti e ad alcuni problemi di approssimazione.

### **Integrali semplici**

Primitive. Integrali indefiniti. Formula di integrazione per parti per gli integrali indefiniti. Formula di integrazione per sostituzione per gli integrali indefiniti. Integrazione delle funzioni elementari o dedotte da funzioni elementari. Integrazione delle funzioni razionali. Alcuni metodi di integrazione. Definizione di integrale definito. Insiemi trascurabili e condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità. Proprietà degli integrali definiti (linearità, monotonia, additività). Formula di integrazione per parti per gli integrali definiti. Formula di integrazione per sostituzione per gli integrali definiti. Teorema della media per gli integrali. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Formula fondamentale del calcolo integrale. Definizione del logaritmo tramite l'integrale. Applicazione dell'integrale definito al calcolo di aree di figure piane e al calcolo di volumi di solidi di rotazione. Integrali impropri. Criteri di convergenza (confronto, confronto asintotico, convergenza assoluta). La funzione degli errori.

### **Successioni e serie numeriche reali**

Definizione di successione. Limite di una successione. Successioni convergenti, divergenti e indeterminate. Teoremi sui limiti delle successioni. Successioni limitate. Successioni monotone. Estremo inferiore ed estremo superiore di una successione. Teorema di esistenza del limite per le successioni monotone. Il numero  $e$  come limite di una successione. Teorema di collegamento e alcune sue applicazioni. Radice  $n$ -esima,  $n$  fattoriale e calcolo di alcuni limiti connessi a queste nozioni. Serie numeriche. Somma di una serie. Carattere di una serie. Condizione necessaria per la convergenza. Serie geometrica. Serie armonica e serie armonica generalizzata. Serie a termini positivi. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico. Criterio dell'integrale. Criterio della convergenza assoluta. Serie a segni

alterni. Criterio di Leibniz. Serie di funzioni. Convergenza semplice, assoluta e totale. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza totale. Passaggio al limite sotto il segno di integrale. Derivabilità termine a termine. Serie di potenze. Raggio di convergenza e proprietà. Serie di Taylor e sviluppi di alcune funzioni.

### **Funzioni di più variabili**

Lo spazio  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^k$ . Norma e distanza. Prodotto scalare. Disuguaglianza di Schwarz. Elementi di topologia in  $\mathbb{R}^k$  (intorni di un punto, punti di accumulazione, punti isolati, punti interni, punti di frontiera, insiemi chiusi, insiemi aperti, chiusura e frontiera di un insieme). Insiemi limitati. Successioni in  $\mathbb{R}^k$ . Funzioni reali di due o più variabili reali. Insiemi di livello. Limiti (finiti e infiniti). Limiti direzionali. Continuità. Teorema di continuità delle funzioni combinate. Teorema di Weierstrass. Derivate parziali. Gradiente. Derivate direzionali. Differenziabilità e sue conseguenze. Piano tangente. Teorema del differenziale totale. Derivate parziali di ordine superiore. Teorema di Schwarz. Massimi e minimi relativi. Condizione necessaria per i punti estremanti (teorema di Fermat). Ricerca di massimi e minimi assoluti in insiemi chiusi e limitati. Matrice hessiana (in due variabili). Condizione sufficiente per i punti estremanti. Funzioni vettoriali di più variabili. Limiti e continuità. Matrice jacobiana. Coordinate polari, sferiche, cilindriche e loro jacobiani.

### **Integrali multipli**

Integrali doppi. Insiemi trascurabili in  $\mathbb{R}^2$  e condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità in un rettangolo. Teorema di riduzione per gli integrali doppi (di Fubini). Integrale in un insieme limitato di  $\mathbb{R}^2$ . Proprietà degli integrali doppi (linearità, monotonia, additività). Formule di riduzione deducibili dal Teorema di Fubini. Formula di cambiamento di variabili per gli integrali doppi. Applicazioni degli integrali doppi al calcolo di masse, centri di massa e momenti d'inerzia. Calcolo dell'integrale della funzione di Gauss tramite gli integrali doppi. Integrali tripli. Insiemi trascurabili in  $\mathbb{R}^3$  e condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità. Teorema di riduzione per gli integrali tripli (di Fubini). Integrale in un insieme limitato di  $\mathbb{R}^3$ . Proprietà degli integrali tripli (linearità, monotonia, additività). Formule di riduzione per gli integrali tripli (formula degli "spaghetti" e delle "fette"). Formula di cambiamento di variabili per gli integrali tripli. Applicazioni degli integrali tripli al calcolo di masse e centri di massa.

## **Equazioni differenziali ordinarie**

Equazioni del primo ordine in forma normale. Definizione di soluzione. Soluzioni massimali. Problema di Cauchy. Teorema di esistenza di Peano. Teorema di esistenza e unicità (della soluzione massimale del problema di Cauchy). Equazioni a variabili separabili. Integrazione delle equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui. Equazioni di ordine  $n$  in forma normale. Funzioni linearmente indipendenti. Integrazione delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Metodi di variazione delle costanti (facoltativo) e altri metodi pratici per la determinazione di una soluzione particolare delle equazioni lineari non omogenee. Esempio dell'oscillatore armonico. Cenno ad alcuni problemi ai limiti per equazioni del secondo ordine.

## **Numeri complessi**

I numeri complessi. Parte reale e parte immaginaria. Somma, prodotto, quoziente di numeri complessi. Coniugato. Modulo. Piano complesso. Forma trigonometrica di un numero complesso. Forma esponenziale di un numero complesso. Formule di Eulero. Potenza  $n$ -esima di un numero complesso. Radici  $n$ -esime di un numero complesso e loro calcolo. Polinomi in campo complesso. Teorema fondamentale dell'algebra.

## **Curve e integrali curvilinei**

Curve parametriche in  $\mathbb{R}^k$ . Curve chiuse, semplici, sostegno di una curva. Curve regolari e regolari a tratti. Definizione di integrale curvilineo non orientato e sue proprietà di linearità, monotonia, additività. Curve rettificabili. Teorema di riduzione di un integrale curvilineo non orientato ad un integrale semplice. Cambiamento di parametro e curve equivalenti. Teorema di indipendenza dell'integrale non orientato dalla parametrizzazione. Applicazioni al calcolo di masse, centri di massa e momenti d'inerzia di un filo.

## **Testo per prerequisiti**

- Anichini G. – Carbone A. – Chiarelli P. – Conti G., *Precorso di Matematica*, Pearson Education, 2010.

## **Testi di riferimento**

- Registro dettagliato delle lezioni in formato pdf (reperibile all'indirizzo <http://www.dma.unifi.it/~pera>).

- Anichini G. – Conti G., *Analisi Matematica 1*, Pearson, Prentice Hall, 2008.
- Anichini G. – Conti G., *Analisi Matematica 2*, Pearson, Prentice Hall, 2010.

**Testi consigliati per consultazione**

- Bertsch M. – Dal Passo R. – Giacomelli L., *Analisi Matematica*, McGraw Hill, Milano, seconda edizione 2011.

**Testi consigliati per esercizi**

- Benevieri P., *Esercizi di Analisi Matematica*, Ed. Città Studi, De Agostini, 2007.
- Marcellini P.- Sbordone C., *Esercitazioni di Matematica 1*, Liguori Editore.
- Marcellini P.- Sbordone C., *Esercitazioni di Matematica 2*, Liguori Editore.
- Salsa S. – Squellati A., *Esercizi di Analisi Matematica 1*, Zanichelli, 2011.
- Salsa S. – Squellati A., *Esercizi di Analisi Matematica 2*, Zanichelli, 2011.