ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA
Università di Firenze - Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica M–Z
Prof. M.Patrizia Pera

Parte 2

Funzioni reali di più variabili

1. Stabilire se i seguenti insiemi sono aperti, chiusi, limitati:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \log(x^2+y^2) < 1\}, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{arcsen} \frac{x+y}{x-y} \geq \frac{\pi}{4}\},$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 \leq 4\}, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1-x^2-y^2} > (1/2)\},$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2\}, \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 < x^2+y^2\},$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 4,\, x^2+y^2 < 1\}.$$

2. Determinare i punti di accumulazione dell'insieme

$$A = \left\{ \left(1+\frac{1}{n}, \frac{2}{n^2}\right), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Stabilire se A è chiuso, aperto, limitato.

3. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine di

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}\,\operatorname{sen}(x^2y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ di

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

$$\log(|y| - 4x^2), \quad \operatorname{arcsen} \frac{x-y}{x+y}, \quad \log(x^2 + y^2 - z),$$

$$\log \frac{2 - |x| - |y|}{(1-x^2)(y^2-1)}\,, \quad \sqrt{x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 9}\,, \quad \operatorname{arcsen} \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2}\,,$$

$$\log \frac{1 - |x| - |y|}{x^2 + y^2}\,, \quad \sqrt{\frac{|x| - 3y^2}{1 - x^2}}\,, \quad \sqrt{\frac{1 + |x| + |y|}{y^2 - 9x^2}}\,,$$

$$\exp\,(\frac{xy+1}{x+y+z})\,, \quad \log \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{z^2 - 1}\,, \quad \log(xy),$$

$$(xy-1)^{\frac{1}{z+1}}\,, \quad e^{\frac{1}{y-x^2}}\,, \quad \sqrt{\cos(x^2+y^2) - 1}\,, \quad \log(4y^2 + x).$$

6. Determinare gli estremi relativi di $f(x, y) = x^2+y^2-2x-1$ e stabilirne la natura. Calcolare l'estremo superiore di f.

7. Determinare i punti di massimo e minimo relativo di

$$f_k(x, y) = e^{(x+1)^2+k(y-1)^2},\ k \neq 0.$$

8. Determinare massimo e minimo assoluti di

   - $f(x, y) = xy + \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ nel cerchio di centro l'origine e raggio 1;
   - $f(x, y) = |x + y| - |x^2 - y^2|$ nel quadrato di vertici $(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)$;
   - $f(x, y) = e^{\sqrt[3]{x+2y+1}}$ nel rombo $|x| + 2|y| \leq 1$;
   - $f(x, y) = \log(2x^2 + y^2)$ nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 3/2)^2 \leq 1/4\}$;
   - $f(x, y) = xy(2x+y-2)$ nel triangolo di vertici $(0, 0), (1, 0), (0, 2)$;
   - $f(x, y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ nella corona circolare di centro l'origine e raggi r, R;
   - $f(x, y) = 10\sqrt{x^2 + y^2} - 6x - 5y^2$ nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2;
   - $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-1}$ in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x + 3 \geq 0\}$;

- $f(x,y) = \log(\sqrt{(x-3)^2+y^2}+8)$ in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2+y^2-3 \le 0,\ \sqrt{3}y - x \le 0,\ \sqrt{3}y + x \ge 0\}$;
- $f(x,y) = 2x^2 + 10xy + 13y^2 - 7x - 8y$ in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 1\}$;
- $f(x,y,z) = x^2 + yz$ in $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge -1\}$.

9. Sia $f_\lambda(x,y) = \lambda x^2 + y^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f_λ nel punto $(1, 1, \lambda+1)$.

Equazioni differenziali

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' \cos x + y \operatorname{sen} x = 1 + \operatorname{tang} x \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

2. Data l'equazione $Ly' + Ry = E$, con $L, R, E > 0$, trovare la soluzione tale che $y(0) = I_0$ e tracciarne il grafico se $I_0 > E/R$. Mostrare che ogni soluzione tende a E/R per $x \to +\infty$.

3. Data l'equazione $y'' + 2y' + \lambda y = e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, determinare per quali valori di λ tutte le soluzioni sono infinitesime per $x \to +\infty$ e per quali valori di λ esiste una soluzione che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

4. Trovare le soluzioni di $y'' + y = 0$ che risolvono i seguenti problemi ai limiti: $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 2$; oppure $y(0) = y(\pi) = 0$; oppure $y(0) = 0, y'(\pi/2) = 1$.

5. Scrivere un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti che abbia come soluzione $y(x) = \cos 3x$.

6. Risolvere le seguenti equazioni: $y'' + (1/x)\operatorname{tang} y' = 0$ (sugg. porre $y' = z$); $\operatorname{tang} x \cos y = -y' \operatorname{tang} y$, $y' = (3x + 2y + 1)^2$ (sugg. porre $3x + 2y + 1 = z$); $y' = e^{x-y}/(1 + e^x)$.

7. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy: $xy' + y = x \cos x$, $y(\pi/2) = 2$; $y' = x\sqrt{4 - y^2}$, $y(0) = 1$.

8. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy (sugg. porre $y' = z$): $y'' - x^2(y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; $y'' = 1/(2y')$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

9. Si consideri l'equazione $y'' - \alpha^2 y = 2e^{3x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Stabilire per quali valori di α si ha $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$.

10. Siano $y' - 10y = e^{-x}, y(0) = \alpha$ e $z' - 10z = e^{-x}, z(0) = \beta$. Determinare α e β tali che $\lim_{x\to+\infty} |y(x)|/|z(x)| = +\infty$.

11. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy: $y' + |x-2|y = |x|$, $y(2) = 1$; $y' + |\cos x|y = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

12. Si consideri l'equazione $y''+\alpha^2 y = (2x+1)\,\mathrm{sen}\, x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione generale dell'equazione.

Integrali doppi

1. Calcolare $\iint_A f(x, y)\, dxdy$ ove
   $f(x, y) = x - y$ e $A = \{(x, y) : y \geq x^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$;
   $f(x, y) = xy$ e $A = \{(x, y) : x + y \geq 1,\ y \geq x^2,\ y \leq \sqrt{x}\}$;
   $f(x, y) = x^2y^2$ e $A = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$;
   $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x - 1/2)^2 + y^2 \geq 1/4\}$.

2. Calcolare la massa di un disco di raggio r sapendo che la densità superficiale è proporzionale alla distanza dal centro.

3. Determinare il baricentro della regione delimitata dalle parabole $y^2 = 4x + 4$ e $y^2 = -2x + 4$.

4. Determinare il baricentro del settore circolare $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y \geq 1$.

5. Calcolare il momento di inerzia dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ rispetto al suo centro, supponendo la densità di massa costante.

6. Calcolare il momento di inerzia della regione omogenea $A = \{(x, y) : y^2 \leq ax \leq a^2\}$ rispetto alla retta $y = -a$.

Integrali tripli

1. Determinare il volume del solido compreso tra il piano $z = 0$, il cilindro $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ e il cono $x^2 + y^2 = z^2$.

2. Calcolare il volume del solido $T = \{(x, y, z) : x+y+z \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

3. Calcolare $\iiint_T z^3\, dxdydz$ ove T è il solido ottenuto facendo ruotare l'insieme $\{(x, y, z) : x = 0,\ 0 \leq y \leq 1,\ \sqrt{y} \leq z \leq 1\}$ intorno all'asse z.

4. Determinare il volume del solido $T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2az \leq 2a\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}\}$.

5. Determinare il volume del solido compreso fra il piano $z = 0$, il paraboloide $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ e il cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}$.

6. Calcolare $\iiint_T x^2+y^2+z^2\, dxdydz$ ove $T = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 \leq x\}$.

7. Determinare il baricentro del solido omogeneo delimitato dal paraboloide $y^2 + 2z^2 = 4x$ e dal piano $x = 2$.

8. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse delle x del solido omogeneo interno al cilindro $x^2 + y^2 = r^2$, $0 \leq z \leq a$.