ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA
Università di Firenze - Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica M–Z
Prof. M.Patrizia Pera

Parte 1-b

Formula di Taylor

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x^2 \operatorname{sen} x} \log \frac{x^4 \sqrt[3]{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen}^2 x + x^2}{e^{x^2} - \cos x}\right), \quad \lim_{x\to 0} (e^{\operatorname{arcsen} x} - 1)^x,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6}{1 - e^{x^2} - \log(1 - x^2)}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + \operatorname{tang} x) - \operatorname{sen} x}{e^x(1 - \cos\sqrt{x}) - (x/2)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2/\operatorname{sen} x)\log(1 + \operatorname{sen}^2 2x)}{(e^{\operatorname{tang} x} - 1)\sqrt{x^5 + \operatorname{tang} x^3 + 3x^2}}, \quad \lim_{x\to \pi/2} \frac{\log(1 - \cos^3 x)}{|x|(x - \pi/2)^{2/3}}.$$

2. Discutere al variare di $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)^{\alpha+1}}{(\operatorname{sen} \alpha x)^3 \log(1 + x^\alpha)}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{\alpha x} - 1)(\operatorname{arcsen} x)^\alpha}{\sqrt{\operatorname{tang} x^\alpha}},$$

$$\lim_{x\to +\infty} |\operatorname{sen} x|^{\alpha x}.$$

3. Confrontare fra loro gli infiniti seguenti (per $x \to +\infty$):

$$2^x, \quad x^x, \quad x\log x, \quad \frac{x^2}{\log x}, \quad 2^x \log x, \quad x^2 2^x.$$

4. Scrivere la formula di Taylor di ordine 6 e di centro $x_0 = 4$ del polinomio $P(x) = 3x^2 + 2x^5 - 5x + 7x^3 + 1$. Per lo stesso polinomio scrivere le formule di Taylor di centro $x_0 = 0$ di ordine 4 e 8 rispettivamente.

5. Scrivere il polinomio di Maclaurin di ordine 6 delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{\log(1 + x^2)}{1 + x}, \quad f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

6. Sia
$$f(x)=\frac{(e^{x^2}-1)\operatorname{sen}x\log(1+x)}{(1+x)^2}\,.$$
Calcolare $f^{(6)}(0)$. (Sugg.: usare la formula di Maclaurin).

7. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0^+}(x+\operatorname{sen}x)^{x^2}\,,\quad \lim_{x\to 0^+}(e^x-x)^{1/x}\,,\quad \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}\,,$$
$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(1+\operatorname{tang}x)^{\operatorname{tang}x}\,,\quad \lim_{x\to 2}(x-2)\operatorname{tang}\frac{\pi x}{4}\,.$$

Integrali

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:
$$\int\frac{\operatorname{sen}x}{(\operatorname{sen}^2x+1)(\cos x+3)}\,dx,\quad \int\frac{3x+5}{x^2+2x+2}\,dx,\quad \int\frac{\log x^2}{x}\,dx,$$
$$\int\frac{1}{2+3\cos x}\,dx,\quad \int\frac{1}{\operatorname{sen}x-\cos x}\,dx,\quad \int\frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx,$$
$$\int\frac{2x+1}{x^2-1}\,dx,\quad \int\frac{\operatorname{arctang}^3x}{1+x^2}\,dx,\int x\operatorname{sen}2x\,dx,\quad \int x^2\cos^3x\,dx.$$

2. Sia $f(x)=\int_0^x\cos t\operatorname{sen}t\,dt$. Provare che f è periodica di periodo 2π.

3. Sia f continua in un intorno di 0. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

4. Sia $f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$. Provare che
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt=0.$$

5. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x e^t\log(1+t)\,dt,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x e^t\log(1+t)\,dt.$$

6. Sia $f\colon[0,2]\to\mathbb{R}$ continua e tale che $\int_0^1 f(x)\,dx=2$ e $\int_1^2 f(x)\,dx=-1$. Provare che esiste $c\in(0,2)$ tale che $f(c)=0$. (Sugg.:usare il teorema della media integrale).

7. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri (N.B. non calcolare gli integrali):
$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x(x^2+1)}\,dx,\quad \int_2^{+\infty}\frac{\operatorname{arctang}x}{\sqrt{x+10}}\,dx,\quad \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}\,dx,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+3}\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctang}\frac{1}{1+x^2}\,dx,$$
$$\int_0^1\frac{\operatorname{tang}x}{x^2(x+3)}\,dx,\quad \int_0^1\frac{dx}{(e^x-1)^\alpha}\,,(\alpha\in\mathbb{R}),\quad \int_0^1\frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}+x^3}\,dx.$$

Successioni e serie numeriche

1. Determinare estremo superiore e estremo inferiore delle seguenti successioni:
$$a_n=\frac{n^2+1}{2n^2+4}\,,\quad a_n=2+\frac{(-1)^n}{n+1}\,,\quad a_n=(-1)^n\frac{n^2}{n+1}\,.$$

2. Usando la definizione di limite verificare che:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n+1}{3n^2-1}=\frac{5}{3}\,,\quad \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n+10}=+\infty.$$

3. Calcolare (se esistono) i limiti delle seguenti successioni:
$$\frac{(-1)^n n}{n^2+\sqrt{n}+2}\,,\quad 10n-\sqrt{n^3-1}\,,\quad \frac{n(1-\cos(1/n))}{\operatorname{sen}(1/n)}\,,\quad n-\operatorname{sen}3n^2\,,$$
$$\frac{n^2+\log(n^{10}+1)}{n^4+2}\,,\quad \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\,,\quad \frac{n^2(-1)^n(1+\operatorname{sen}(1/n))}{1+n}\,,$$
$$\sqrt{(n-a)(n-b)}-n,\ a,b\in\mathbb{R}\,,\quad (-1)^{n+1}\frac{2-e^{-n}}{1+e^{n^2}}\,,\quad \frac{(-1)^n2^n}{n^n-10}\,,$$
$$\frac{\operatorname{sen}(a/n)}{\operatorname{sen}(b/n)},\ a,b\in\mathbb{R},\quad \frac{5^n+(1+\frac{1}{n+2})^{n+2}}{4^n+\operatorname{sen}n}\,,\quad \frac{n}{(n-1)^n}\,,\quad e^n-(-1)^n2^n.$$

4. Si può dimostrare che se $\{a_n\}$ è una successione di numeri reali positivi tale che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, allora $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Sulla base di ciò calcolare $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$

5. Si può dimostrare che se $\{a_n\}$ è una successione di numeri reali positivi tale che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sulla base di ciò calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!}$, $r > 1$.

6. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

   a) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

   b) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $b_n > (1/n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

7. Provare che non è vero che
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n-7} = 1.$$

8. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n + \log(2n) + 3n! + n^7 + \mathrm{sen}(5n)}{\log(3+n) + n^4 + 4 + 6n^n - n}.$$

9. Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - \log n}{(n+3n^3}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\Big(1 - \cos\frac{2}{n^2}\Big),$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n; \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 \log n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^5\Big(\frac{3+(-1)^n}{5}\Big)^n,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\Big(\frac{n+2}{n+3}\Big)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^n}{e^{2n} + \log n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(e^{(1/n^2)} - 1)}{\mathrm{sen}(1/n)},$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big).$$

10. Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono convergenti le seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n(n+2)}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-x}}{(3^x-1)^n}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\frac{x}{n^2}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos x)^n\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\sqrt{n}}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{x^n}{n^2(n+1)^3}\right).$$