ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA
Università di Firenze - Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica M–Z
Prof. M.Patrizia Pera

Parte 1-a

Insiemi e numeri reali

1. Risolvere le seguenti disequazioni:
$$\frac{|x-1|(x-2)}{x+2} > x\,; \quad \frac{3x+1}{x-1} < \frac{2x+2}{x-2}\,; \quad \sqrt{x^2+5x+6} < x+7\,;$$
$$\frac{|x+1|}{x-1} \geq 1\,; \quad \sqrt{x^2+\sqrt{x}} \geq x+\sqrt{x}\,; \quad |x+1|+|x-1| < 1\,;$$
$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2} \geq 2\sqrt{2x+3}\,; \quad x|x|+3x-1 \geq 0\,;$$
$$\frac{1}{-x^2-x+a} > -1, a \in \mathbb{R}\,.$$

2. Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : x+3 > \sqrt{3x^2+10x+3}\}\,, B = \{x \in \mathbb{R} : |2x-1| > x^2-1\}$. Determinare $A \cap B\,, A \cup B\,, A \setminus B$ e stabilire se sono insiemi limitati.

3. Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{x^2-4}}{|x+1|} \leq 1\}\,, B = \{x \in \mathbb{R} : x^2-8x+15 \leq 0\}$. Determinare il complementare di B in A.

4. Siano Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : 2|x-2| \geq |x-1|\}\,; B_k = \{x \in \mathbb{R} : 3^x \geq k, k \in \mathbb{R}\}\,, C = \{k \in \mathbb{R} : B_k \subseteq A\}$. Dire se $C = \emptyset$, se $2 \in C$, se C è limitato superiormente.

5. Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 \leq 0\}\,, B = \{x \in \mathbb{R} : \log(3/2 - \operatorname{sen} x) \geq 0\}$. Determinare $A \cap B\,, A \cup B$ e $A \setminus B$. Stabilire se sono insiemi limitati.

6. Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : |x|x+2 > x\}\,, B = [0,2]$. Stabilire se l'insieme $A \cap B$ è un intervallo.

7. Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x-1|}{|x|} > 1+x\}, B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \leq 1\}$. Determinare il complementare di $A \cup B$.

8. Siano $A_k = \{x \in \mathbb{R} : e^x \geq k, k \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x \in [0, \pi/2] : \operatorname{tang} x \leq 1\}$. Determinare $A_k \cap B$ e $A_k \cup B$.

9. Siano A, B, C sottoinsiemi di X. Stabilire se $A \subseteq B$ è condizione necessaria e/o sufficiente affinché si abbia $(A \cup B) \cap C = A \cap C$.

10. Provare che $A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$.

11. Stabilire se le coppie di proposizioni che seguono sono una la negazione dell'altra. In caso negativo scrivere la negazione di entrambe:
    - a) $\exists\, x \neq 0$ tale che non esiste x^{-1}; b) $\exists\, x \neq 0$ tale che $xy = 1\, \forall\, y \in \mathbb{R}$;
    - a) $\forall\, x > 0\, \exists\, y > 0$ tale che $xy < 1$; b) $\exists\, x < 0$ tale che $xy \geq 1\, \forall\, y < 0$;
    - a) $\forall\, x > 0\, \exists\, y > 0$ tale che $x + y < 1$; b) $\exists\, x > 0$ tale che $\forall\, y > 0$ si ha $x + y \geq 1$.

12. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: $2 \geq 2$; $3 > 2$; $3 \geq 2$; $a \geq b \Rightarrow a > b$; $a > b \Rightarrow a \geq b$; $a = b \Rightarrow a \geq b$.

13. Siano $a, b \geq 0$. Provare che $a < b \iff a^2 < b^2$.

14. Provare che $2 \max\{a, b\} = a + b + |a - b|, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

15. Determinare estremo superiore e estremo inferiore dei seguenti insiemi:$\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1-q^n}{1-q}, n \in \mathbb{N}, |q| < 1 \text{ fissato }\}$; $\{x \in \mathbb{R} : x = \log \frac{n+1}{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$; $\{x \in \mathbb{R} : x = \operatorname{sen}(\pi/n), n \neq 0, n \in \mathbb{Z}\}$.

16. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n (n/(n+1))\}$. Determinare i punti di accumulazione di A, $\sup A$, $\inf A$. Esistono $\max A$ e $\min A$?

17. Stabilire se i seguenti insiemi sono limitati superiormente, limitati inferiormente; determinarne (se esistono) estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo.

$$\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + x - 6} > 1\}; \quad \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2 - 4} > -3\};$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x + \sqrt{x - 4} < \sqrt{3 - x}\,(x+1)\}; \quad \{x \in \mathbb{R} : |\operatorname{sen}(3x+2)| \geq 1\};$$

$$\{x \in \mathbb{R} : \log \frac{1}{1-x^2} < 0\}\,; \quad \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \left(2 - \frac{1}{3n}\right)\,,\, n \in \mathbb{N}\};$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n+1}{n^2+3}\,,\, n \in \mathbb{N}\}\,; \quad \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n^3 + \operatorname{sen} n}{n + \sqrt{n} + 2}\,,\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Funzioni reali di una variabile

1. Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3(x-1)$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x + 1$. Determinare $\mathrm{Im} g \circ f$ e $\mathrm{Im} f \circ g$.

2. Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + 1$. Stabilire se $g \circ f$ e $f \circ g$ sono invertibili e, in caso affermativo, determinare la funzione inversa.

3. Determinare un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ in cui siano invertibili le seguenti funzioni: $f(x) = e^{2x+1}\,, f(x) = e^{|x|+1}\,, f(x) = \log(x^2+1)\,, f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{-1}$. Scrivere l'inversa della restrizione di f ad A.

4. Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - |x|$ e $g \setminus \{0\}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1/x$. Stabilire il dominio di $f \circ g$. Calcolare estremo superiore e inferiore di $f \circ g$.

5. Calcolare estremo superiore, inferiore e limite per $x \to \pm\infty$ di: $f(x) = |x|(x+1)\,, f(x) = x + [x]\,, f(x) = |\cos x|$.

6. Sia $f(x) = -\sqrt{\frac{x+1}{x}}$. Determinare il dominio di f. Stabilire se f è superiormente limitata, se è inferiormente limitata, se la restrizione di f a $[3, +\infty)$ è limitata, se f è monotona, se esistono $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-(1/2)} f(x)$.

7. Sia $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 2\}$. Stabilire se A e B sono insiemi limitati.

8. Stabilire se è possibile trovare una funzione f tale che $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ e $f(1/n) = 0\,, \forall n \in \mathbb{N}$.

9. Sia
$$f_n(x) = \left(\frac{x^n - 1}{x^n + 1}\right)^2, x \neq -1,\, n \in \mathbb{N}.$$

Provare che per ogni $x \neq -1$ esiste $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Detto $f(x)$ tale limite, calcolare $f(1)\,, f(1/2)\,, f(2)$. Calcolare $\lim_{x\to 1} f(x)$ e $\lim_{x\to -1} f(x)$.

10. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+\operatorname{sen} x}{x^4+x^2+\cos x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x+x^2+3x^3}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2+x^3+\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1+\cos^(1/x))}{\sqrt{x^3-1}}, \quad \lim_{x\to(\pi/2)} \frac{((\pi/2)-x)^2}{\cos x}, \quad \lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x+\operatorname{sen} 2x^2}{x \operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x\operatorname{sen} x}{\sqrt{x^3-\cos x}},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\operatorname{tang}^2 x}{(1-\cos 3x)\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen}(\pi x/2)}{x-2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}-\sqrt{1+\operatorname{sen} 2x}}{1+\cos 2x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{xe^{(1/|x|)}}{1-x^2}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{(1-x^2)}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}, a > b.$$

11. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Dimostrare che $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = |f(x)|$ è continua. Mostrare con un esempio che non vale il viceversa.

12. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f([a,b]) \subseteq \mathbb{Q}$. Provare che f è costante.(Sugg.: usare uno dei corollari del teorema degli zeri).

13. Trovare una funzione continua f tale che $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$ e $f(2) = 0$; trovare una funzione continua f tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

14. Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tale che $f([0,1]) \subseteq [0,1]$. Provare che esiste $c \in [0,1]$ tale che $f(c) = c$.

15. Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Provare che f ammette minimo assoluto in (a,b).

16. Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Provare che esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.

17. Sia $f(x) = e^x + 3x$. Dimostrare che f è invertibile e calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y = 1$.

18. Provare che $f(x) = x^{100} + ax + b$ ha al più due zeri reali.

19. Provare che $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ha un unico zero in $[-1, 1]$.

20. Provare che l'equazione $\log x = e^x$ non ha soluzioni.

21. Provare che $f(x) = e^x - 1 - x$ non si annulla in $[1, +\infty)$.

22. Provare che $(x^4 + 7)^{17} = 215$ ha al più due radici reali.

23. $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) = f'(b) = 1$. Provare che esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

24. Sia
$$f(x) = \frac{x^2}{x^{2471} + x^{1328} - x^{250} - 4}\,.$$
Stabilire se f è definita per $x > 0$ e per $x > 2$.

25. Studiare le funzioni seguenti:
$$\log|1 - x| + |\log(x^2 + 1)|, \quad \log\frac{x^2 - 1}{1 - 3x}\,, \quad \frac{x^2|x - 1|}{|x + 1|}\,,$$
$$\operatorname{arctang}\frac{3x}{x^2 - 3}\,, \quad e^{\frac{1}{1-2|\cos x|}}\,, \quad 1 + (1/x) + (1/x^2), \quad \cos(\operatorname{arcsen} x),$$
$$\arccos\frac{|x^{-}1|}{x^2}\,, \quad \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}\,, \quad \sqrt[3]{x^2 - 2x + 3}\,, \quad x - \sqrt{|x^2 - 1| + x}\,,$$
$$(x - 1)e^{-(1-x)^2}, \quad e^{-x}\log\frac{|3x^2 - 6x + 3|}{|x + 1|}\,, \sqrt{\log(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x})}\,,$$
$$\sqrt{1 + \frac{1}{1 - 2|\operatorname{sen} x|}}\,, \quad |x|\sqrt{\frac{x - 1}{2x - 1}}\,.$$

26. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le funzioni $f_k(x) = e^x - kx + 1$ e $f_k(x) = 2k\log x - x$.

27. Sia $f(x) = ax^3 + (3 + a)x^2$, $a \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di a per i quali f abbia un flesso in $x = 1$.

28. Determinare l'immagine della funzione $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$.

29. Studiare le seguenti funzioni:

$$\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{1+|x|}}\,, \quad \operatorname{tang}\sqrt{\frac{|1-x^2|}{1+x^2}}\,, \sqrt{|x|(x-1)^2}\,,$$

$$\log\frac{e^x-1}{e^{-x}+1}\,, \operatorname{arcsen}\frac{1}{\log|x-1|}\,.$$

30. Sia data la funzione

$$f_k(x) = \begin{cases} e^{1/x} + k\,x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $x = -1$ è un punto di minimo relativo per f_k e i valori di k per cui f_k è limitata in $[a, +\infty)$, $a > 0$.