Registro delle lezioni del corso di Analisi Matematica 1
Università di Firenze - Scuola di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica e Gestionale E–N
a.a. 2020/21 - Prof. M.Patrizia Pera

1^{a} **settimana - dal 28.9.20**

• Testo di riferimento :

- Anichini G. – Conti G., *Analisi Matematica 1*, Pearson Education, 2008.

• Testo consigliato per consultazione :

- Bertsch M. – Dal Passo R. – Giacomelli L., *Analisi Matematica*, McGraw Hill, Milano 2011.

• Testo consigliato per i prerequisiti:

- Anichini G. – Carbone A. – Chiarelli P. – Conti G., *Precorso di Matematica*, Pearson Education, 2010.

• Testi consigliati per esercizi:

- Benevieri P., *Esercizi di Analisi Matematica*, Ed. De Agostini, 2007.
- Marcellini P. – Sbordone C., *Esercitazioni di Matematica 1*, Liguori Editore.
- Salsa S. – Squellati A., *Esercizi di Analisi Matematica 1*, Zanichelli, 2011.

Cenni di teoria degli *insiemi*. Vari modi per rappresentare un insieme. Unione e intersezione di due insiemi. Sottoinsiemi di un insieme. Sottoinsieme proprio. Insieme vuoto. Complementare di un insieme (rispetto ad un universo assegnato). Leggi di De Morgan. Differenza tra due insiemi.

Cenno ai quantificatori: "esiste " ($\exists$) e "per ogni" ($\forall$).

Cenno ai connettivi logici: "e" ($\wedge$), "o" ($\vee$), "implica" ($\Longrightarrow$), "equivale" o "se e solo se" ($\Longleftrightarrow$).

Esempio. La proposizione "dato un qualunque numero reale positivo esiste un numero naturale che lo supera" si può scrivere

$$\text{“}\,\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N} : n > x\text{”}.$$

Ricordiamo che in un teorema nella forma $A \implies B$, la proposizione A si chiama *ipotesi* e la B si dice *tesi*. Il teorema afferma che un solo fatto non si può verificare: che sia falsa B e vera A. Quando A è falsa, $A \implies B$ è vera.

Esempio.

1. La proposizione (detta anche enunciato o affermazione) "se un numero è maggiore di 10, allora è maggiore di 7 " si può scrivere

$$\text{“}\,a > 10 \implies a > 7\,\text{”}.$$

2. La proposizione "se un numero è maggiore di 10, allora non è minore di 0" si può scrivere

$$\text{“}\,a > 10 \not\Longrightarrow a < 0\,\text{”}.$$

Esempio. La proposizione "$a \geq b$ è equivalente a $3a \geq 3b$" si può scrivere

$$\text{“}\,a \geq b \iff 3a \geq 3b\,\text{”}.$$

Richiami sulla nozione di condizione necessaria e di condizione sufficiente e sulla negazione di una affermazione.

Esempio. Condizione *necessaria* affinché risulti $a > 10$ è che si abbia $a > 7$. Si può anche dire che $a > 10$ è condizione *sufficiente* (ma non necessaria!) affinché risulti $a > 7$.

Esempio. La negazione della affermazione "tutti gli studenti di quest'aula hanno i capelli neri" è "esiste (almeno) uno studente di quest'aula che non ha i capelli neri".

Esempio. La negazione della affermazione "tutti gli studenti di quest'aula sono iscritti a Ingegneria e hanno i capelli neri" è "esiste (almeno) uno studente di quest'aula che non è iscritto a Ingegneria o che non ha i capelli neri".

Esempio. La negazione della seguente proposizione

$$\text{“}\forall\, x > 0\; \exists\, y > 0 : x + y < 1\text{”}$$

è

$$\text{“}\exists\, x > 0\; : \forall\, y > 0 \implies x + y \geq 1\text{”}.$$

Definizione. Si dice *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B l'insieme, denotato col simbolo $A \times B$, costituito dalle coppie ordinate (x, y) con $x \in A$ e $y \in B$. Il prodotto cartesiano $A \times A$ si denota anche con A^2. Analogamente, A^3 è l'insieme delle terne ordinate degli elementi di A.

Definizione. Un'*operazione binaria* in un insieme X è una "legge" che ad ogni coppia (x_1, x_2) di $X \times X$ associa un elemento di X.

Negli insiemi numerici, esempi di operazioni binarie sono la *addizione* $(+)$ e la *moltiplicazione* $(\cdot)$.

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali l'addizione e la moltiplicazione determinano una *struttura algebrica* con le seguenti proprietà: associativa, commutativa, distributiva, esistenza e unicità dell'elemento neutro rispetto alla somma (0) e rispetto al prodotto (1), esistenza e unicità dell'opposto e esistenza e unicità dell'inverso di ogni numero diverso da 0.

I numeri *naturali* $(\mathbb{N})$ e i numeri *interi* $(\mathbb{Z})$ possono essere pensati sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$.

Osserviamo che in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$ alcune delle precedenti proprietà non valgono. I numeri razionali si rappresentano spesso in forma *decimale* (si dice anche in base 10) e, anzi, si può far vedere che l'insieme $\mathbb{Q}$ può essere identificato con gli allineamenti o limitati (cioè con un numero finito di cifre decimali non nulle) oppure periodici propri (cioè periodici con periodo diverso da 9).

Esercizio. Dedurre dalle proprietà della struttura algebrica di $\mathbb{Q}$ che:

1. $a \cdot 0 = 0, \forall\, a$
2. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, $\forall\, a, b$
3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, $\forall\, a, b$
4. $a \cdot b = 0 \implies (a = 0) \vee (b = 0)$ (legge di annullamento del prodotto)

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ si definisce anche un *ordinamento*, che si indica con $\leq$, e che soddisfa le seguenti proprietà:

- $a \leq b$ oppure $b \leq a \quad \forall a, b$ (dicotomia)
- $a \leq a$, $\forall a$ (proprietà riflessiva)
- $a \leq b$ e $b \leq a \implies a = b$ (proprietà antisimmetrica)
- $a \leq b$ e $b \leq c \implies a \leq c$ (proprietà transitiva)
- $a \leq b \implies a + c \leq b + c$, $\forall c$ (compatibilità con la somma)
- $a \leq b$ e $0 \leq c \implies a \cdot c \leq b \cdot c$, (compatibilità con il prodotto)

Definizione. Definiamo $a \geq b$ se $b \leq a$.

Definizione. Definiamo $a < b$ se $a \leq b$ e $a \neq b$.

Osservazioni sul significato dei simboli di minore e di minore o uguale. Ad esempio le disuguaglianze $2 \leq 3$, $2 \leq 2$, $2 < 3$ sono tutte e tre vere.

Esercizio. Dedurre dagli assiomi precedenti i seguenti fatti

- $a \geq 0 \iff -a \leq 0$,
- $a \leq b$ e $c \leq 0 \implies ac \geq bc$,
- $a^2 \geq 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$,
- Siano $a, b \geq 0$. Si ha $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$.

Eviteremo in questo corso di affrontare il problema di definire e costruire il sistema dei *numeri reali*, che si indica con $\mathbb{R}$. Tale problema, che nasce dalle osservazioni dei Pitagorici sull'esistenza di grandezze incommensurabili, ha richiesto secoli di studi e approfondimenti fino ad ottenere una sistemazione soddisfacente nei primi anni del secolo scorso con i contributi di Dedekind e Cantor. Ci limiteremo qui a osservare che dal punto di vista della struttura algebrica e dell'ordinamento, gli assiomi che permettono di costruire i numeri reali sono gli stessi introdotti in precedenza nei numeri razionali. Enunceremo in seguito l'*assioma di completezza*, una proprietà che differenzia i numeri reali dai razionali.

Proviamo intanto il seguente risultato

Teorema. *L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzione nei razionali.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un numero razionale x tale che $x^2 = 2$. Senza perdere in generalità possiamo supporre che x sia positivo e possiamo scriverlo nella forma $x = p/q$ con p e q primi tra loro. Si ha

$$p^2 = 2q^2\,,$$

per cui p^2 è pari e, quindi, p è pari (è facile infatti verificare che il quadrato di un numero dispari è un numero dispari). Di conseguenza, $p = 2r$ per qualche $r \in \mathbb{N}$. Sostituendo nell'uguaglianza precedente si ottiene

$$4r^2 = 2q^2\,,$$

da cui q^2 e, quindi, q sono pari. Questo è assurdo, perché p e q sono primi fra loro e, pertanto, non possono essere entrambi pari. $\square$

Vedremo tra poco che la proprietà di completezza garantisce che in $\mathbb{R}$ un tale $x > 0$ esiste. Esso si denota con $\sqrt{2}$ e, ovviamente, non è un numero razionale. L'insieme dei numeri reali non razionali, i cosiddetti numeri *irrazionali*, si indica con $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Nella rappresentazione decimale, i numeri irrazionali sono gli allineamenti illimitati non periodici.

Un ruolo essenziale nella teoria dei numeri reali è svolto dall'assioma di Dedekind.

Definizione. Una *sezione* in $\mathbb{R}$ è una coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ che soddisfano le seguenti proprietà:

1. $A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = \mathbb{R}\,;$
2. $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a < b\,.$

Assioma di Dedekind. "Per ogni sezione (A, B) di $\mathbb{R}$ esiste un numero reale s tale che

$$a \leq s \leq b\,,$$

per ogni $a \in A\,, b \in B$".

Il numero s è detto *elemento separatore* delle *classi* A e B.

Osservazione. Esistono sezioni dei razionali prive di elemento separatore. Ad esempio consideriamo la sezione

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 \leq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}.$$

L'eventuale elemento separatore s di tale sezione dovrebbe soddisfare l'equazione $s^2 = 2$ che, per quanto dimostrato in precedenza, non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Definizione. Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con la proprietà che se contiene due punti, contiene anche tutti i punti intermedi si dice un *intervallo* di $\mathbb{R}$. In altre parole, $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se è vera la seguente proposizione: $(x_1, x_2 \in I) \wedge (x_1 < x < x_2) \implies x \in I$.

I seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono intervalli (a e b sono due numeri reali assegnati, $a < b$):
- $(a,b) := \big\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\big\}$
- $[a,b] := \big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\big\}$
- $(a,b] := \big\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\big\}$
- $[a,b) := \big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\big\}$
- $(-\infty,a) := \big\{x \in \mathbb{R} : x < a\big\}$
- $(-\infty,a] := \big\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\big\}$
- $(a,+\infty) := \big\{x \in \mathbb{R} : a < x\big\}$
- $[a,+\infty) := \big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\big\}$
- $(-\infty,+\infty) := \mathbb{R}$

I primi quattro sono detti intervalli *limitati* di *estremi* a e b; i rimanenti sono detti intervalli *non limitati.* gli intervalli $(a,b), (-\infty,a), (a,+\infty)$ sono detti intervalli *aperti*, mentre $[a,b], (-\infty,a], [a,+\infty)$ sono detti intervalli *chiusi.* Il motivo di tali denominazioni sarà chiarito in seguito. Per il momento le possiamo considerare delle definizioni.

Gli intervalli $(a,+\infty)$ e $[a,+\infty)$ si dicono *semirette destre (di estremo a)*, mentre $(-\infty,a)$ e $(-\infty,a]$ si dicono *semirette sinistre.*

Osservazione. In base alla definizione precedente, l'insieme vuoto e l'insieme costituito da un solo punto sono intervalli (si chiamano anche *intervalli banali*).

Osservazione. L'intersezione di due intervalli è un intervallo (che può essere eventualmente vuoto o costituito da un sol punto, cioè essere un intervallo banale).

Osservazione. L'unione di due intervalli può non essere un intervallo (lo è, ad esempio, se l'intersezione è non vuota).

Esercizio. Mostrare che $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ non è un intervallo.

Definizione. Il *valore assoluto* di un numero reale $x \in \mathbb{R}$ è così definito:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Esempio.

$$|2| = 2 \quad |-3| = 3 \quad |0| = 0.$$

Definizione. Il *segno* di un numero reale $x \in \mathbb{R}$ è così definito:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Esempio.

$$\operatorname{sign} 3 = +1 \quad \operatorname{sign}(-2) = -1.$$

Esercizio. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$|x| = (\operatorname{sign} x)\, x\,.$$

Le proprietà fondamentali del valore assoluto sono:

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| = 0 \iff x = 0$;
3. $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ (disuguaglianza triangolare).

Ulteriori proprietà del valore assoluto che si deducono dalle precedenti sono:

4. $||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$;
5. $|x_1 x_2| = |x_1||x_2|$.

Definizione. Dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, il numero (ovviamente non negativo) $|x_1 - x_2|$ si dice *distanza* tra i due punti x_1 e x_2.

Definizione. Si dice *ampiezza* di un intervallo limitato la distanza tra i suoi estremi.

Osservazione. Gli intervalli (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ hanno tutti la stessa ampiezza, cioè $b - a$.

Esercizio. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Provare che l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

coincide con l'intervallo aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Provare che l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| > r\}$$

coincide con l'unione dei due intervalli aperti e non limitati $(-\infty, x_0 - r)$ e $(x_0 + r, +\infty)$.

Definizione. Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ ed assegnato un numero $r > 0$, l'*intorno* di x_0 di raggio r è l'insieme

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

costituito dai punti x che distano da x_0 meno di r. Pertanto, $B_r(x_0)$ coincide con l'intervallo aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$ di centro x_0 e ampiezza $2r$.

Esercizio. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$|x+3| \le |x-1|\,; \quad ||x+1|-2| < 1; \quad \frac{|x-1|}{|x+4|} \le 1; \quad \sqrt{x^2-3} \le |x+1|$$

Esercizio. Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$|x| \le \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Provare che risulta $x = 0$.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo $x \neq 0$. Di conseguenza risulta $|x| > 0$. Consideriamo $\epsilon_0 = |x|/2$. Perciò si ha $0 < \epsilon_0 < |x|$ contro l'ipotesi. □

Definizione. $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto si dice *limitato superiormente [inferiormente]* se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $x \le k$ $[x \ge k]$, $\forall x \in A$. Il numero k si dice un *maggiorante [minorante]* dell'insieme A.

Osservazione. Se esiste k maggiorante di A, allora ogni numero $k_1 \ge k$ è ancora un maggiorante di A. Perciò, l'insieme dei maggioranti di un insieme dato, se è non vuoto, è una semiretta non limitata superiormente.

Definizione. $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto si dice *limitato* se è limitato sia superiormente che inferiormente, cioè se esistono $h, k \in \mathbb{R}$ tali che

$$h \le x \le k, \quad \forall x \in A\,.$$

Esempio. L'intervallo $(-\infty, a)$ è limitato superiormente ma non inferiormente, l'intervallo $(a, +\infty)$ è limitato inferiormente ma non superiormente, l'intervallo $(a, b]$ è un insieme limitato. L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è limitato inferiormente (ogni $h \in \mathbb{R}$, $h \le 0$ è un minorante di $\mathbb{N}$) ma, come dedurremo in seguito dalla proprietà di Archimede, non è limitato superiormente.

Una caratterizzazione degli insiemi limitati è data dalla seguente proposizione

Proposizione. *$A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se e solo se esiste $K > 0$ tale che*

$$|x| \le K, \quad \forall x \in A.$$

Dimostrazione. Sia $K > 0$ tale che $|x| \leq K, \quad \forall x \in A$. Perciò, per quanto osservato in precedenza, $-K \leq x \leq K$ per ogni $x \in A$. Questo significa che K è un maggiorante di A e che $-K$ è un minorante di A, cioè che l'insieme A è limitato. Viceversa, supponiamo che esistano due numeri h e k tali che $h \leq x \leq k$, $\forall x \in A$. Posto $K = \max\{|h|, |k|\}$ risulta $|x| \leq K$, $\forall x \in A$. $\square$

Definizione. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, diciamo che $M \in \mathbb{R}$ [$m \in \mathbb{R}$] è *massimo [minimo]* di A se

1) $M \in A$ [$m \in A$];

2) $x \leq M$ [$x \geq m$] per ogni $x \in A$.

Si scrive $M = \max A$ [$m = \min A$].

Osservazione. Non è difficile provare che, se un insieme ha massimo [minimo], tale massimo [minimo] è unico. Perciò si dovrà dire che un numero M è, ad esempio, **il** massimo di un insieme A e non che è **un** massimo di A.

Esempio. Il massimo dell'intervallo $(a, b]$ è b. Tale intervallo non ha minimo.

Esempio. Il minimo dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x = 1 - 1/n, n \in \mathbb{N}\}$ è 0. Proveremo dopo che tale insieme non ha massimo.

Abbiamo già osservato prima che l'insieme dei maggioranti di un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente è una semiretta destra. La proprietà fondamentale che distingue i razionali dai reali afferma che tale semiretta ha minimo, cioè è la seguente:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e limitato superiormente. Allora l'insieme dei maggioranti di A ammette minimo.

Tale proprietà si può dedurre dall'assioma di Dedekind e, anzi, si può dimostrare che è ad esso equivalente.

Essa giustifica la definizione che segue.

Definizione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e limitato superiormente. Si dice *estremo superiore* di A e si denota con $\sup A$ il minimo dei maggioranti di A. In maniera analoga si definisce *estremo inferiore* di un insieme non vuoto e limitato inferiormente il massimo dei minoranti dell'insieme.

In conseguenza di questa definizione, la proprietà precedente può essere così riformulata:

Assioma di completezza (o di continuità) dei reali. "Ogni sottoinsieme dei numeri reali non vuoto e limitato superiormente [inferiormente] ammette estremo superiore [inferiore]".

Osservazione. Estremo superiore e inferiore di un insieme essendo, rispettivamente, il "minimo" dei maggioranti ed il "massimo" dei minoranti sono unici. Inoltre essi coincidono, rispettivamente, con il massimo ed il minimo dell'insieme quando questi esistono.

Esempio. L'estremo superiore dell'intervallo aperto (a,b) di $\mathbb{R}$ è b. Basta infatti osservare che l'insieme dei maggioranti di (a,b) è la semiretta $[b,+\infty)$. Notiamo che l'estremo superiore dell'intervallo $(a,b]$ è ancora b. Infatti l'insieme dei maggioranti di $(a,b]$ è ancora la semiretta $[b,+\infty)$. In questo secondo caso l'estremo superiore è anche il massimo dell'intervallo.

In maniera analoga si prova che $\inf(a,b) = a$ e che $\inf[a,b) = \min[a,b) = a$.

Due importanti conseguenze dell'assioma di Dedekind sono le seguenti:

Teorema (Proprietà di Archimede.) *Per ogni coppia di numeri reali positivi x, y, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n\,x > y$.*

Osservazione. Dalla proprietà di Archimede, prendendo $x = 1$, si deduce che l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente.

Teorema. (Proprietà di densità.) *L'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali è denso in $\mathbb{R}$, vale a dire, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $x < r < y$.*

2^a **settimana - dal 5.10.20**

Proposizione. (Caratterizzazioni dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore di un insieme limitato). *Dato* $l \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\sup A = l \quad [\inf A = l] \iff \begin{cases} 1)\ x \leq l,\ \forall x \in A\,; \quad [x \geq l,\ \forall x \in A\,] \\ \\ 2)\ \forall \epsilon > 0,\ \exists\, x_\epsilon \in A : l - \epsilon < x_\epsilon\ [l + \epsilon > x_\epsilon]. \end{cases}$$

Esempio. Usando la caratterizzazione dell'estremo superiore diamo una nuova dimostrazione del fatto che $\sup(a, b) = b$. Infatti, essendo $a < x < b$, la prima condizione della caratterizzazione è ovviamente soddisfatta. Inoltre, dato $\epsilon > 0$ e tale che $\epsilon < b - a$, il punto $x_\epsilon = b - \epsilon/2$ è tale che $b - \epsilon < x_\epsilon < b$. Ovviamente, se $\epsilon \geq b - a$ ogni $x \in (a, b)$ è tale che $b - \epsilon < x$. $\square$

Esempio. Dalla proprietà di Archimede si deduce che

$$\inf\{x \in \mathbb{R} : x = 1/n, n \in \mathbb{N}\} = 0\,.$$

Analogamente si ha

$$\sup\{x \in \mathbb{R} : x = 1 - 1/n, n \in \mathbb{N}\} = 1\,.$$

Esempio. Sia

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n(1 - 1/n^2), n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Allora si ha $\sup A = 1$; $\quad \inf A = -1$.

Usando la caratterizzazione precedente, proviamo che l'estremo superiore dell'insieme A vale 1. Ovviamente $(-1)^n(1 - 1/n^2) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, cioè 1 è un maggiorante. Inoltre, se $0 < \epsilon < 1$, la relazione $1 - \epsilon < (-1)^n(1 - 1/n^2)$ è soddisfatta prendendo n pari, $n > 1/\sqrt{\epsilon}$. Se invece $\epsilon \geq 1$, ogni n pari è tale che la condizione 2) è soddisfatta, cioè, per ogni $\epsilon > 0$, $1 - \epsilon$ non è un maggiorante di A. $\square$

Notazione. Per convenzione, se un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato superiormente [inferiormente] si pone

$$\sup A = +\infty, \quad [\inf A = -\infty]\,.$$

Esercizio. Sia

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n n, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Provare che $\sup A = +\infty$ e che $\inf A = -\infty$.

Funzioni

Definizione. Una legge $f\colon X \to Y$, che ad ogni elemento x di un insieme X, detto il *dominio* di f, associa un unico elemento $y = f(x)$ di un insieme Y, detto il *codominio* si dice una *funzione (o applicazione)* tra i due insiemi X e Y.

Per indicare che f associa ad un generico elemento $x \in X$ l'elemento $f(x) \in Y$, talvolta si usa la notazione $f\colon x \mapsto f(x)$. Ad esempio, la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ si denota anche $f\colon x \mapsto x^2$.

Data una funzione $f\colon X \to Y$ e dato un sottoinsieme A di X, l'*immagine* di A (tramite f) è il sottoinsieme $f(A)$ del codominio Y di f costituito dagli elementi y che sono immagine di almeno un $x \in A$. In simboli:

$$f(A) = \Big\{ y \in Y : y = f(x) \text{ per almeno un } x \in A \Big\}.$$

L'immagine $f(X)$ di tutto il dominio si chiama anche *immagine di f* e si denota col simbolo $\mathrm{im} f$ (oltre ovviamente che con $f(X)$).

Un esempio di funzione è la legge che ad ogni studente dell'aula associa la prima lettera del suo cognome. Il dominio, in questo caso, è l'insieme degli studenti presenti in aula. Una possibile scelta del codominio, è l'insieme di tutte le lettere dell'alfabeto. L'immagine della funzione è l'insieme costituito dalle lettere che corrispondono ad almeno uno studente presente in aula (è molto probabile che sia un sottoinsieme proprio del codominio, e in tal caso diremo che la funzione non è suriettiva).

Funzioni *reali*: quando il codominio è un sottoinsieme dei reali che, per semplicità, supporremo coincidere con $\mathbb{R}$.

Funzioni reali di *variabile reale*: sono funzioni reali il cui dominio è un sottoinsieme dei reali.

Data una funzione $f\colon X \to Y$ e dato un sottoinsieme B del suo codominio Y, la *retroimmagine* (o *controimmagine* o *immagine inversa* o *preimmagine*) di B (tramite f) è il sottoinsieme (eventualmente vuoto) $f^{-1}(B)$ di X costituito dagli elementi la cui immagine sta in B. In simboli:

$$f^{-1}(B) = \Big\{ x \in X : f(x) \in B \Big\}.$$

Analogamente, se $B = \{y\}$, dove y è un elemento di Y fissato, e si ha

$$f^{-1}(\{y\}) = \Big\{ x \in X : f(x) = y \Big\}.$$

Ad esempio, per $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ risulta $f^{-1}(\{3\}) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, $f^{-1}(\{-4\}) = \emptyset$, $f^{-1}([-1,4]) = [-2,2]$ e $f^{-1}((1,4]) = [-2,-1) \cup (1,2]$.

Definizione. Si dice *grafico* di una funzione $f\colon X \to Y$ e si denota con $\operatorname{graf} f$ il sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$ costituito dalle coppie (x,y) che verificano la condizione $y = f(x)$ (che è detta equazione del grafico). Si ha cioè

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}\,.$$

Osservazione. Il grafico di una funzione reale di variabile reale può essere pensato come un sottoinsieme del piano cartesiano. Ovviamente, non tutti i sottoinsiemi del piano sono grafici di una funzione reale di variabile reale $x \mapsto f(x)$. Ad esempio l'insieme

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\Big\}$$

non è un grafico, mentre lo è

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\Big\}.$$

Esercizio. Scrivere in forma esplicita la funzione $x \mapsto f(x)$ il cui grafico è dato da

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - x = 4,\ y \geq 0\Big\}$$

e determinarne il dominio.

Definizione. Una funzione $f\colon X \to Y$ si dice *iniettiva* se da $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ segue $f(x_1) \neq f(x_2)$ o, equivalentemente, se dati $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$ si ha $x_1 = x_2$, o, ancora, se per ogni $y \in Y$ esiste al più un $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

Definizione. Una funzione $f\colon X \to Y$ si dice *suriettiva* se per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

Osservazione. Una funzione è suriettiva se e solo se la sua immagine coincide col suo codominio.

Definizione. Una funzione $f\colon X \to Y$ si dice *biiettiva* o, anche, *corrispondenza biunivoca* se è iniettiva e suriettiva, cioè se per ogni $y \in Y$ esiste uno e un solo $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

Esempio. La funzione che ad ogni studente presente in aula associa il suo codice fiscale è ovviamente iniettiva, mentre non lo è quella che ad ogni studente in aula fa corrispondere l'iniziale del suo cognome (possiamo affermarlo con certezza, dato che gli studenti presenti sono più del numero delle lettere dell'alfabeto).

Esempio. La funzione reale di variabile reale $x \mapsto 3x + 2$ è biiettiva.

Esempio. Consideriamo la funzione $x \mapsto x^3 - x$. Vedremo in seguito che (come conseguenza del teorema dei valori intermedi) tale funzione è suriettiva. Essa non è però iniettiva perché l'equazione $x^3 - x = 0$ ammette più di una soluzione (verificarlo per esercizio).

Definizione. Data $f\colon X \to Y$ e dato un sottoinsieme A di X, se si pensa f definita soltanto per gli elementi di A, si dice che f è stata ristretta ad A o, anche, che si considera una *restrizione* di f ad A. La restrizione di f ad A si denota $f|_A\colon A \to Y$.

Esempio. La funzione reale di variabile reale $x \mapsto x^2$ non è iniettiva nel suo dominio, mentre la sua restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$ è iniettiva.

Definizione. Dato un insieme X, la funzione da X in X che ad ogni $x \in X$ fa corrispondere x stesso è detta *identità* in X ed è denotata con I_X. In altre parole, l'identità in X è la funzione $I_X\colon X \to X$ definita da $I_X(x) = x$.

Definizione. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ due funzioni. La *composizione* di f con g, denotata $g{\circ}f$, è quell'applicazione (detta anche *funzione composta*) che ad ogni $x \in X$ associa il numero $g(f(x)) \in Z$. Più in generale, può accadere che la funzione g sia definita in un sottoinsieme Y_0 di Y. In tal caso, la composizione ha senso quando è non vuota l'intersezione di Y_0 con $\operatorname{im} f$ e il dominio di $g{\circ}f$ è ovviamente il sottoinsieme di X

$$X_0 = \{x \in X : f(x) \in Y_0\}$$

Tale insieme non è altro che $f^{-1}(Y_0)$, cioè, per quanto visto in precedenza, è l'immagine inversa di Y_0 (tramite f).

Esempio. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, e sia $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt{y}$. Allora il dominio di $g{\circ}f$ è il sottoinsieme

$$X_0 = \big\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\big\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

e $g{\circ}f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Esercizio. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ due funzioni. Provare che:

$$f, g \text{ iniettive} \implies g{\circ}f \text{ iniettiva}$$

$$f, g \text{ suriettive} \implies g \circ f \text{ suriettiva}$$
$$g \circ f \text{ iniettiva} \implies f \text{ iniettiva}$$
$$g \circ f \text{ suriettiva} \implies g \text{ suriettiva}$$

Definizione. Data una funzione iniettiva $f\colon X \to Y$, la sua *funzione inversa*, denotata f^{-1}, è quella legge che ad ogni y dell'immagine di f associa l'unico elemento $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

Esempio. Come già osservato, la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 3x + 2$ è biiettiva. Pertanto è definita la funzione inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si ha $f^{-1}(y) = (y - 2)/3$.

Esempio. La funzione $f(x) = e^x$ ha come dominio $\mathbb{R}$ e come immagine l'intervallo $(0, +\infty)$ mentre la sua inversa $f^{-1}(y) = \log y$ ha come dominio $(0, +\infty)$ e come immagine $\mathbb{R}$. La funzione $f(x) = x^2 + 1$ non è iniettiva nel suo dominio, cioè in $\mathbb{R}$. Risulta invece iniettiva la sua restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$. L'inversa di tale restrizione è la funzione $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}$ che ha come dominio $[1, +\infty)$ e come immagine $[0, +\infty)$.

È bene precisare che in alcuni testi di Analisi Matematica vengono dette invertibili soltanto le funzioni biiettive (cioè iniettive e suriettive). Noi preferiamo chiamare invertibili le funzioni solamente iniettive (senza richiedere la suriettività). In tal caso il dominio della funzione inversa coincide con l'immagine della funzione che si inverte.

È immediato verificare che se $f\colon X \to Y$ è iniettiva, allora

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ \forall x \in X, \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(y)) = y,\ \forall y \in f(X).$$

In altre parole si ha $f^{-1} \circ f = I_X$ e $f \circ f^{-1} = I_{f(X)}$, dove ricordiamo che I_X e $I_{f(X)}$ denotano l'identità in X e in $f(X)$ rispettivamente.

Funzioni reali di variabile reale

Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione il cui dominio è un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$. Poiché in $\mathbb{R}$ abbiamo introdotto un ordinamento, ha senso dare la seguente definizione.

Definizione. Diremo che $f\colon A \subseteq X \to \mathbb{R}$ è *crescente [strettamente crescente]* in A se da $x_1, x_2 \in A$ e $x_1 < x_2$ segue $f(x_1) \leq f(x_2)$ $[f(x_1) < f(x_2)]$.

Osservazione. Le funzioni strettamente crescenti sono anche crescenti.

In maniera analoga si definisce una funzione *decrescente* oppure *strettamente decrescente*.

L'espressione
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \quad x_1 \neq x_2\,,$$
è detta *rapporto incrementale* ed è $\geq 0\,[\leq 0]$ se f è crescente [decrescente]. Ovviamente, risulta
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}, \quad \forall x_1 \neq x_2\,.$$

Si chiamano *funzioni [strettamente] monotòne* le funzioni [strettamente] crescenti o [strettamente] decrescenti; ossia quelle per cui il prodotto $(x_2-x_1)(f(x_2)-f(x_1))$, con x_1 e x_2 nel dominio, non cambia mai di segno.

Osservazione. È immediato verificare che le funzioni strettamente monotone sono iniettive. Osserviamo che il viceversa in generale è falso. Ad esempio, la funzione $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ così definita
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1), \\ 3-x & x \in [1,2]\,, \end{cases}$$
è iniettiva ma non è monotona in [0,2].

Osservazione. L'inversa di una funzione strettamente crescente [decrescente] è strettamente crescente [decrescente].

Definizione e grafici delle funzioni: valore assoluto, segno, gradino di Heaviside, parte intera (denotata $x \mapsto [x]$), mantissa (cioè la funzione $x \mapsto x-[x]$).

Definizione e grafici delle seguenti funzioni: lineari, potenze, esponenziale e logaritmo.

Osservazione. Si fa presente che, data $f\colon X \to \mathbb{R}$, col simbolo $f(x)$ si dovrebbe intendere il valore che la funzione f assume nel punto $x \in X$. In altre parole, a rigore, $f(x)$ rappresenta un numero e non una funzione. Talvolta però, per abuso di linguaggio (e per tradizione), con $f(x)$ intenderemo la funzione f, e la lettera x (detta variabile indipendente) rappresenterà un generico elemento del dominio e non un punto fissato. Comunque, se $f(x)$ rappresenta un numero o una funzione si capisce dal contesto. Ad esempio, $f(2)$ rappresenta inequivocabilmente un numero (il valore assunto da f nel punto 2), così come la notazione $f(x_0)$ denota presumibilmente il valore assunto da f in un punto x_0 fissato. A volte, per indicare ad esempio la funzione coseno non scriveremo cos (come a rigore si dovrebbe fare) ma $\cos x$ o $\cos t$ o $\cos\theta$, ecc. (la lettera usata per rappresentare la variabile indipendente è spesso suggerita dal suo significato fisico o geometrico).

3^a settimana - dal 12.10.20

Definizione. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice *pari* in X se $-x \in X$ per ogni $x \in X$ e $f(x) = f(-x)$.

Definizione. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice *dispari* in X se $-x \in X$ per ogni $x \in X$ e $f(x) = -f(-x)$.

Definizione. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice *periodica di periodo* $T > 0$ se $x + T \in X$ per ogni $x \in X$ e $f(x + T) = f(x)$.

Le *funzioni trigonometriche seno, coseno, tangente* e loro principali proprietà.

Osservazione. Vale l'uguaglianza $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Osservazione. Se una funzione è periodica di periodo T, allora è periodica anche di periodo $2T$, $3T$, ecc. Pertanto, una funzione periodica ha infiniti periodi. Il più piccolo tra tutti si chiama *periodo minimo.*

Si osservi che la somma, il prodotto e il quoziente di funzioni periodiche, tutte dello stesso periodo T, è ancora una funzione periodica di periodo T. La minimalità del periodo, tuttavia, non si conserva con tali operazioni. Ad esempio, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sono periodiche di periodo 2π, e quindi, per quanto detto, è periodica di periodo 2π anche la funzione $\operatorname{tang} x := \operatorname{sen} x/\cos x$; ma mentre 2π è il periodo minimo per le prime due funzioni, non lo è per la terza (il periodo minimo di $\operatorname{tang} x$ è π).

Esempi di funzioni pari: le costanti, x^2, $1/x^2$, x^4, x^{2k} (con $k \in \mathbb{Z}$), $\cos x$, $\cos 3x$, $1/\cos x$, $1 - x^2 \cos x$, $x \operatorname{tang} x$, $|x|e^{-x^2} - x^2 \cos x$.

Esempi di funzioni dispari: $1/x^3$, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 3x$, $1/\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} x \cos x$, $\operatorname{tang} x$, $xe^{-x^2} - x^2 \operatorname{sen} x$.

Esempi di funzioni periodiche: le costanti, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 3x$, $1/\operatorname{sen} x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{sen} x \cos x$, $\operatorname{sen} 2x + 3\cos 5x$.

Le *funzioni trigonometriche inverse arcoseno, arcocoseno, arcotangente*: loro dominio, immagine e grafico.

Definiamo la funzione arcoseno. A questo scopo, osserviamo che la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ (essendo periodica) non è ovviamente iniettiva in $\mathbb{R}$, mentre lo è la sua restrizione all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Ha senso perciò definire la funzione inversa di tale restrizione. Questa inversa è detta *funzione arcoseno*, e ha come dominio l'intervallo $[-1, 1]$ e come immagine l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Inoltre, essa è strettamente crescente, essendo l'inversa di una funzione strettamente crescente.

In maniera analoga si possono definire le funzioni arcocoseno e arcotangente. L'*arcocoseno* è l'inversa della restrizione del coseno all'intervallo $[0, \pi]$. Ha come dominio l'intervallo $[-1, 1]$ e come immagine l'intervallo $[0, \pi]$. L'*arcotangente* è l'inversa della restrizione della tangente all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Ha come dominio $\mathbb{R}$ e come immagine l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Osservazione. La funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

è tale che non si può disegnarne il grafico.

Definizione. Data una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$, la funzione $|f|\colon X \to \mathbb{R}$ cosí definita $|f|(x) = |f(x)|$ è detta *valore assoluto di* f.

Esercizio. Disegnare il grafico della funzione $x \mapsto |x^2 - 4|$.

Esercizio. Disegnare il grafico della funzione $x \mapsto |\log x|$.

Esercizio. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\log|x| + \log|x+1| < 1\,;$$

$$\frac{|\cos 2x|}{|\operatorname{sen} x|} \leq 1\,.$$

Esercizio. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1 - |x|| < 3\}, B_k = \{x \in \mathbb{R} : e^x \geq k\}, C = \{k \in \mathbb{R} : B_k \subseteq A\}$. Stabilire se $1 \in C$ e se C contiene l'intervallo $(2, +\infty)$.

Le nozioni di maggiorante e minorante di un insieme si applicano in particolare all'insieme immagine di un insieme X tramite una funzione reale f. In altre parole, data $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice che f è *limitata superiormente [inferiormente] in* X se esiste una costante $k\,[h]$ tale che

$$f(x) \leq k, \quad \forall x \in X \quad [f(x) \geq h, \quad \forall x \in X].$$

Si dice che f è *limitata in* X se è limitata sia superiormente che inferiormente in X, cioè se esistono due costanti h e k tali che

$$h \leq f(x) \leq k, \quad \forall x \in X.$$

Esempi di funzioni limitate nel loro dominio sono il seno, l'arcotangente e la mantissa. La funzione $f(x) = 1/x$ non è limitata inferiormente né superiormente nel suo dominio (cioè in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), mentre è limitata inferiormente ma non superiormente in $X = (0, +\infty)$ ed è limitata, per esempio, in $X = (1, +\infty)$.

In maniera analoga a quanto si può provare per gli insiemi si ha il seguente risultato:

Proposizione. *Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ è limitata in X se e solo se esiste $K > 0$ tale che $|f(x)| \leq K$ per ogni $x \in X$.*

Come per la limitatezza, anche le nozioni di estremo superiore e estremo inferiore di un insieme si applicano in particolare all'insieme immagine di un insieme X tramite una funzione reale f. Più precisamente

Definizione. Data $f\colon X \to \mathbb{R}$ si definisce *estremo superiore [inferiore] di f in X* l'estremo superiore [inferiore] dell'insieme $f(X)$.

Si scrive

$$\sup_{x\in X} f(x) \quad [\inf_{x\in X} f(x)]$$

o, anche,

$$\sup_X f \quad [\inf_X f]$$

Proposizione. (Caratterizzazioni dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore di una funzione limitata). *Dato $l \in \mathbb{R}$ si ha*

$$l = \sup_{x\in X} f(x) \quad [l = \inf_{x\in X} f(x)] \iff$$

$$\begin{cases} 1)\ f(x) \leq l,\ [f(x) \geq l,] \quad \forall x \in X\,; \\ 2)\ \forall \epsilon > 0, \exists\, x_\epsilon \in X : l - \epsilon < f(x_\epsilon) \quad [l + \epsilon > f(x_\epsilon)]. \end{cases}$$

Definizione. Data $f\colon X \to \mathbb{R}$ si definisce *massimo [minimo] assoluto (o globale) di f in X* il massimo [minimo] dell'insieme $f(X)$. In altre parole, $M \in \mathbb{R}\,[m \in \mathbb{R}]$ è il massimo [minimo] assoluto di f in X se esiste $x_0 \in X$, detto *punto di massimo [minimo] assoluto*, tale che

1) $M = f(x_0) \quad [m = f(x_0)]$;

2) $f(x) \leq M \quad [f(x) \geq m]$ per ogni $x \in X$.

Si scrive

$$M = \max_{x\in X} f(x) \quad [m = \min_{x\in X} f(x)]$$

oppure
$$M = \max_X f \quad [m = \min_X f].$$

Osservazione. Se il massimo [minimo] assoluto di una funzione esiste, esso ovviamente è unico e coincide con l'estremo superiore [inferiore] di f in X.

N.B. I punti di massimo [minimo] assoluto (che possono essere più di uno) appartengono al dominio della funzione, mentre il massimo [minimo] appartiene all'immagine della funzione.

Esempio. Il massimo di $\cos x$ è 1, mentre i punti di massimo sono infiniti (sono i numeri $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$). Il minimo di $\cos x$ è -1 ed è assunto nei punti $x = (2k+1)\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$

Esempio. La funzione $f(x) = \operatorname{arctang} x$ non ha né massimo né minimo in $\mathbb{R}$ pur essendo una funzione limitata. Si ha
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctang} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \inf_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctang} x = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Esempio. Il massimo di
$$f(x) = \frac{3}{1+|x+2|}$$
vale 3 ed è assunto nel punto in cui è minima la funzione $|x+2|$. Pertanto f ha come unico punto di massimo $x = -2$. Poiché $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, 0 è un minorante per f ma non è il minimo di f. Dato che il denominatore di $f(x)$ si può rendere arbitrariamente grande, è lecito supporre che 0 sia l'estremo inferiore di f (cioè il massimo dei minoranti di f). Per provare che effettivamente $0 = \inf f$, in base alla caratterizzazione, occorre mostrare che se $\epsilon > 0$, allora ϵ non è un minorante; ossia esiste un x_ϵ per il quale si ha $f(x_\epsilon) < \epsilon$. In altre parole, occorre provare che, dato un arbitrario $\epsilon > 0$, la disequazione
$$\frac{3}{1+|x+2|} < \epsilon$$
ammette almeno una soluzione (verificarlo per esercizio).

Esercizio. Provare che
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = \max_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = f(0) = 1\,.$$
Inoltre
$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = 0$$
e, ovviamente, il minimo non esiste.

Esercizio. Provare che

$$\sup_{x>0} e^{-1/x^2} = 1\,, \quad \inf_{x>0} e^{-1/x^2} = 0\,.$$

Esercizio. Provare che

$$\sup_{x>0} (x - [x]) = 1$$

dove $[x]$ denota la parte intera di x.

Osservazione. Molte volte, nello studio delle funzioni reali di una variabile, invece di assegnare a priori il dominio di una data funzione f, si usa assegnare una espressione $f(x)$ e stabilire a posteriori quale è il più grande sottoinsieme di punti x di $\mathbb{R}$ per i quali $f(x)$ "ha senso", cioè per i quali $f(x) \in \mathbb{R}$. Tale sottoinsieme viene detto *dominio naturale* di f o, anche, *insieme di definizione* o *campo di esistenza* di f e denotato dom$f$ o, anche, $D(f)$.

Esempio. Sia data $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Il dominio naturale di f è dato da

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}.$$

Perciò

$$\operatorname{dom} f = (-\infty, 1] \cup [1, +\infty).$$

Definizione (di funzione combinata). Date due funzioni reali di variabile reale f e g, la loro somma $f + g$, il loro prodotto fg, il loro quoziente f/g e la loro composizione $g \circ f$ si definiscono nel modo seguente:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
2. $(fg)(x) = f(x)g(x)$;
3. $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$;
4. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Il dominio di ciascuna di queste quattro funzioni (ottenute combinando f e g mediante le operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione) è dato dall'insieme dei numeri reali x per cui ha senso l'operazione che la definisce. Per esempio, il dominio di $f + g$ è l'insieme dei numeri x per cui ha senso scrivere sia $f(x)$ sia $g(x)$, altrimenti non è definita la somma $f(x) + g(x)$. Pertanto $\operatorname{dom}(f + g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$. Analogamente $\operatorname{dom}(fg) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, $\operatorname{dom}(f/g) =$

$\{x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g : g(x) \neq 0\}$ e $\operatorname{dom} g \circ f = \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) \in \operatorname{dom} g\} = f^{-1}(\operatorname{dom} g)$.

Esercizio. Stabilire l'insieme di definizione di

$$f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-4}}\,.$$

Si dovrà avere $x^2 - 4 > 0$ perché sia definita la radice al denominatore e $|x+1| \leq \sqrt{x^2-4}$ perché sia definito l'arcoseno. Si ottiene perciò $\operatorname{dom} f = (-\infty, -5/2]\,$.

Limiti

Ricordiamo che, dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ ed assegnato un numero $\delta > 0$, l'*intorno* di x_0 di raggio δ è l'intervallo non banale

$$B_\delta(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\big\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

costituito dai punti x che distano da x_0 meno di δ.

Definizione. Si dice *intorno forato* di un punto x_0 di raggio δ l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\} = B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Definizione. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di *accumulazione* per un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ se in ogni intorno forato di x_0 cadono punti di X, cioè se per ogni $\delta > 0$ risulta $X \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Osservazione. Dalla definizione sopra si deduce che se x_0 è di accumulazione per un insieme X, allora ogni intorno di x_0 contiene **infiniti** punti di X. Supponiamo infatti che esista un intorno di x_0 contenente un numero finito di punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $X \setminus \{x_0\}$. Sia $\bar\delta = \min\{|x_i - x_0|, i = 1, \ldots, n\}$ e sia $0 < \delta < \bar\delta$. Si ha $X \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \emptyset$, che contraddice l'ipotesi che x_0 sia punto di accumulazione per X.

Esempio.

– L'insieme
$$X = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n}{n},\, n \in \mathbb{N}\}$$
ha come unico punto di accumulazione 0 che non appartiene ad X. Proviamo che 0 è di accumulazione per X. Fissato $\delta > 0$, sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 > 1/\delta$. Si ha $0 < 1/n_0 < \delta$ e quindi $X \cap (-\delta, \delta) \neq \emptyset$.

– L'insieme
$$X = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n(1 - \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}\}$$
ha come punti di accumulazione 1 e -1 entrambi non appartenenti ad X.
– L'insieme dei punti di accumulazione sia dell'intervallo (a, b) che dell'intervallo $[a, b]$ è $[a, b]$.
– Ricordando che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali è denso in $\mathbb{R}$, si ottiene che l'insieme dei punti di accumulazione dell'insieme $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ è $[a, b]$.

Definizione. I punti di un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ che non sono di accumulazione per X si dicono punti *isolati* di X. In altre parole, $x_0 \in X$ si dice punto isolato se esiste $\delta > 0$ tale che $X \cap B_\delta(x_0) = \{x_0\}$.

Esempio.

– I punti dell'insieme
$$X = \{x \in \mathbb{R} : x = 1/n, n \in \mathbb{N}\}$$
sono tutti isolati.

Infatti, fissiamo $x_0 = 1/n_0$. Si ha
$$\frac{1}{n_0 + 1} < x_0 < \frac{1}{n_0 - 1}\,,$$
da cui, scegliendo
$$\delta \leq \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0 + 1}\,,$$
risulta $X \cap B_\delta(x_0) = \emptyset$.
– L'insieme $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito tutto da punti isolati.

Il teorema che segue è una importante conseguenza della proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ e fornisce una condizione sufficiente affinché un insieme in $\mathbb{R}$ possegga punti di accumulazione.

Teorema (Principio di Bolzano-Weierstrass). *Ogni insieme limitato e infinito di $\mathbb{R}$ ammette almeno un punto di accumulazione.*

Osservazione. Le ipotesi del Principio di Bolzano-Weierstrass non possono essere indebolite. Infatti, un esempio di un insieme infinito di $\mathbb{R}$ privo di punti di accumulazione è $\mathbb{N}$ (che è non limitato), mentre un esempio di un insieme limitato privo di punti di accumulazione è $X = \{1, 2, 3\}$ (che ovviamente non è infinito).

Definizione (di limite finito-finito). Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e sia x_0 un punto di accumulazione per il dominio X di f. Si dice che $f(x)$ tende ad un numero reale l per x che tende ad x_0 se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ (dipendente da ϵ) tale che da $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in X$ segue $|f(x) - l| < \epsilon$.

Notazione. Per indicare che $f(x)$ tende a l per x che tende ad x_0 si scrive

$$f(x) \to l \quad \text{per} \quad x \to x_0.$$

Si usa anche dire che il *limite per x che tende ad x_0 di $f(x)$ è uguale a l* e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Osservazione. Il punto x_0 è di accumulazione per X, ma può non appartenere a X. Ad esempio la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x/x$ ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma ha senso fare il limite di $\operatorname{sen} x/x$ per $x \to 0$, essendo 0 punto di accumulazione per il dominio di f. Vedremo in seguito che tale limite vale 1.

Osservazione. Nel caso in cui $x_0 \in X$, l'eventuale valore di f in x_0 , cioè $f(x_0)$, non influisce sul valore del limite di $f(x)$ per $x \to x_0$. Ad esempio, data la funzione $f(x) = [\cos x]$, si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$, (ricordiamo che $[\cdot]$ denota la parte intera).

Esercizio. Verificare, usando la definizione di limite, che

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + x) = 2.$$

Suggerimento. Si tratta di verificare che, preso $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $0 < |x - 1| < \delta$ risulta $|x^2 + x - 2| < \epsilon$. Risolvendo la disequazione $2 - \epsilon < x^2 + x < 2 + \epsilon$, si trova

$$\delta_\epsilon = \min\left\{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \epsilon}, -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \epsilon}\right\}$$

che fornisce l'intorno di $x_0 = 1$ cercato.