Registro delle lezioni del corso di Analisi Matematica 1
Università di Firenze - Scuola di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica e Gestionale E–N
a.a. 2019/20 - Prof. M.Patrizia Pera

Prima parte

1^a **settimana - dal 16.9.19**

• Testo di riferimento :

- Anichini G. – Conti G., *Analisi Matematica 1*, Pearson Education, 2008.

• Testo consigliato per consultazione :

- Bertsch M. – Dal Passo R. – Giacomelli L., *Analisi Matematica*, McGraw Hill, Milano 2011.

• Testo consigliato per i prerequisiti:

- Anichini G. – Carbone A. – Chiarelli P. – Conti G., *Precorso di Matematica*, Pearson Education, 2010.

• Testi consigliati per esercizi:

- Benevieri P., *Esercizi di Analisi Matematica*, Ed. De Agostini, 2007.

- Marcellini P. – Sbordone C., *Esercitazioni di Matematica 1*, Liguori Editore.

- Salsa S. – Squellati A., *Esercizi di Analisi Matematica 1*, Zanichelli, 2011.

Cenni di teoria degli *insiemi.* Vari modi per rappresentare un insieme. Unione e intersezione di due insiemi. Sottoinsiemi di un insieme. Sottoinsieme proprio. Insieme vuoto. Complementare di un insieme (rispetto ad un universo assegnato). Leggi di De Morgan. Differenza tra due insiemi.

Cenno ai quantificatori: "esiste " ($\exists$) e "per ogni" ($\forall$).

Cenno ai connettivi logici: "e" ($\wedge$), "o" ($\vee$), "implica" ($\implies$), "equivale" o "se e solo se" ($\iff$).

Esempio. La proposizione "dato un qualunque numero reale positivo esiste un numero naturale che lo supera" si può scrivere

$$\text{“}\forall\, x \in \mathbb{R},\, x > 0,\, \exists\, n \in \mathbb{N} : n > x\text{”}.$$

Ricordiamo che in un teorema nella forma $A \implies B$, la proposizione A si chiama *ipotesi* e la B si dice *tesi.* Il teorema afferma che un solo fatto non si può verificare: che sia falsa B e vera A. Quando A è falsa, $A \implies B$ è vera.

Esempio.

1. La proposizione (detta anche enunciato o affermazione) "se un numero è maggiore di 10, allora è maggiore di 7 " si può scrivere

$$\text{“}\, a > 10 \implies a > 7\,\text{”}.$$

2. La proposizione "se un numero è maggiore di 10, allora non è minore di 0" si può scrivere

$$\text{“}\, a > 10 \;\not\Longrightarrow\; a < 0\,\text{”}.$$

Esempio. La proposizione "$a \geq b$ è equivalente a $3a \geq 3b$" si può scrivere

$$\text{“}\, a \geq b \iff 3a \geq 3b\,\text{”}.$$

Richiami sulla nozione di condizione necessaria e di condizione sufficiente e sulla negazione di una affermazione.

Esempio. Condizione *necessaria* affinché risulti $a > 10$ è che si abbia $a > 7$. Si può anche dire che $a > 10$ è condizione *sufficiente* (ma non necessaria!) affinché risulti $a > 7$.

Esempio. La negazione della affermazione "tutti gli studenti di quest'aula hanno i capelli neri" è "esiste (almeno) uno studente di quest'aula che non ha i capelli neri".

Esempio. La negazione della affermazione "tutti gli studenti di quest'aula sono iscritti a Ingegneria e hanno i capelli neri" è "esiste (almeno) uno studente di quest'aula che non è iscritto a Ingegneria o che non ha i capelli neri".

Esempio. La negazione della seguente proposizione

$$\text{“}\forall\, x > 0\ \exists\, y > 0 : x + y < 1\text{”}$$

è

$$\text{“}\exists\, x > 0\ : \forall\, y > 0 \implies x + y \geq 1\text{”}.$$

Definizione. Si dice *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B l'insieme, denotato col simbolo $A \times B$, costituito dalle coppie ordinate (x, y) con $x \in A$ e $y \in B$. Il prodotto cartesiano $A \times A$ si denota anche con A^2. Analogamente, A^3 è l'insieme delle terne ordinate degli elementi di A.

Definizione. Un'*operazione binaria* in un insieme X è una "legge" che ad ogni coppia (x_1, x_2) di $X \times X$ associa un elemento di X.

Negli insiemi numerici, esempi di operazioni binarie sono la *addizione* $(+)$ e la *moltiplicazione* $(\cdot)$.

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali l'addizione e la moltiplicazione determinano una *struttura algebrica* con le seguenti proprietà: associativa, commutativa, distributiva, esistenza e unicità dell'elemento neutro rispetto alla somma (0) e rispetto al prodotto (1), esistenza e unicità dell'opposto e esistenza e unicità dell'inverso di ogni numero diverso da 0.

I numeri *naturali* $(\mathbb{N})$ e i numeri *interi* $(\mathbb{Z})$ possono essere pensati sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$.

Osserviamo che in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$ alcune delle precedenti proprietà non valgono. I numeri razionali si rappresentano spesso in forma *decimale* (si dice anche in base 10) e, anzi, si può far vedere che l'insieme $\mathbb{Q}$ può essere identificato con gli allineamenti o limitati (cioè con un numero finito di cifre decimali non nulle) oppure periodici propri (cioè periodici con periodo diverso da 9).

Esercizio. Dedurre dalle proprietà della struttura algebrica di $\mathbb{Q}$ che:

1. $a \cdot 0 = 0, \forall\, a$
2. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, $\forall\, a, b$
3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, $\forall\, a, b$
4. $a \cdot b = 0 \implies (a = 0) \vee (b = 0)$ (legge di annullamento del prodotto)

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ si definisce anche un *ordinamento*, che si indica con $\leq$, e che soddisfa le seguenti proprietà:

- $a \leq b$ oppure $b \leq a \quad \forall a, b$ (dicotomia)
- $a \leq a$, $\forall a$ (proprietà riflessiva)
- $a \leq b$ e $b \leq a \implies a = b$ (proprietà antisimmetrica)
- $a \leq b$ e $b \leq c \implies a \leq c$ (proprietà transitiva)
- $a \leq b \implies a + c \leq b + c$, $\forall c$ (compatibilità con la somma)
- $a \leq b$ e $0 \leq c \implies a \cdot c \leq b \cdot c$, (compatibilità con il prodotto)

Definizione. Definiamo $a \geq b$ se $b \leq a$.

Definizione. Definiamo $a < b$ se $a \leq b$ e $a \neq b$.

Osservazioni sul significato dei simboli di minore e di minore o uguale. Ad esempio le disuguaglianze $2 \leq 3$, $2 \leq 2$, $2 < 3$ sono tutte e tre vere.

Esercizio. Dedurre dagli assiomi precedenti i seguenti fatti

- $a \geq 0 \iff -a \leq 0$,
- $a \leq b$ e $c \leq 0 \implies ac \geq bc$,
- $a^2 \geq 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$,
- Siano $a, b \geq 0$. Si ha $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$.

Eviteremo in questo corso di affrontare il problema di definire e costruire il sistema dei *numeri reali*, che si indica con $\mathbb{R}$. Tale problema, che nasce dalle osservazioni dei Pitagorici sull'esistenza di grandezze incommensurabili, ha richiesto secoli di studi e approfondimenti fino ad ottenere una sistemazione soddisfacente nei primi anni del secolo scorso con i contributi di Dedekind e Cantor. Ci limiteremo qui a osservare che dal punto di vista della struttura algebrica e dell'ordinamento, gli assiomi che permettono di costruire i numeri reali sono gli stessi introdotti in precedenza nei numeri razionali. Enunceremo in seguito l'*assioma di completezza*, una proprietà che differenzia i numeri reali dai razionali.

Proviamo intanto il seguente risultato

Teorema. *L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzione nei razionali.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un numero razionale x tale che $x^2 = 2$. Senza perdere in generalità possiamo supporre che x sia positivo e possiamo scriverlo nella forma $x = p/q$ con p e q primi tra loro. Si ha

$$p^2 = 2q^2 \,,$$

per cui p^2 è pari e, quindi, p è pari (è facile infatti verificare che il quadrato di un numero dispari è un numero dispari). Di conseguenza, $p = 2r$ per qualche $r \in \mathbb{N}$. Sostituendo nell'uguaglianza precedente si ottiene

$$4r^2 = 2q^2 \,,$$

da cui q^2 e, quindi, q sono pari. Questo è assurdo, perché p e q sono primi fra loro e, pertanto, non possono essere entrambi pari. $\square$

Vedremo tra poco che la proprietà di completezza garantisce che in $\mathbb{R}$ un tale $x > 0$ esiste. Esso si denota con $\sqrt{2}$ e, ovviamente, non è un numero razionale. L'insieme dei numeri reali non razionali, i cosiddetti numeri *irrazionali*, si indica con $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Nella rappresentazione decimale, i numeri irrazionali sono gli allineamenti illimitati non periodici.

2^a **settimana - dal 23.9.19**

Un ruolo essenziale nella teoria dei numeri reali è svolto dall'assioma di Dedekind.

Definizione. Una *sezione* in $\mathbb{R}$ è una coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ che soddisfano le seguenti proprietà:

1. $A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = \mathbb{R}\,;$
2. $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a < b\,.$

Assioma di Dedekind. "Per ogni sezione (A, B) di $\mathbb{R}$ esiste un numero reale s tale che

$$a \leq s \leq b\,,$$

per ogni $a \in A\,, b \in B$".

Il numero s è detto *elemento separatore* delle *classi* A e B.

Osservazione. Esistono sezioni dei razionali prive di elemento separatore. Ad esempio consideriamo la sezione

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 \leq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}.$$

L'eventuale elemento separatore s di tale sezione dovrebbe soddisfare l'equazione $s^2 = 2$ che, per quanto dimostrato in precedenza, non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Definizione. Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con la proprietà che se contiene due punti, contiene anche tutti i punti intermedi si dice un *intervallo* di $\mathbb{R}$. In altre parole, $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se è vera la seguente proposizione: $(x_1, x_2 \in I) \wedge (x_1 < x < x_2) \implies x \in I$.

I seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono intervalli (a e b sono due numeri reali assegnati, $a < b$):

- $(a, b) := \big\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\big\}$
- $[a, b] := \big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\big\}$
- $(a, b] := \big\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\big\}$
- $[a, b) := \big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\big\}$
- $(-\infty, a) := \big\{x \in \mathbb{R} : x < a\big\}$
- $(-\infty, a] := \big\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\big\}$
- $(a, +\infty) := \big\{x \in \mathbb{R} : a < x\big\}$
- $[a, +\infty) := \big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\big\}$

- $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$

I primi quattro sono detti intervalli *limitati* di *estremi* a e b; i rimanenti sono detti intervalli *non limitati*. gli intervalli $(a, b), (-\infty, a), (a, +\infty)$ sono detti intervalli *aperti*, mentre $[a, b], (-\infty, a], [a, +\infty)$ sono detti intervalli *chiusi*. Il motivo di tali denominazioni sarà chiarito in seguito. Per il momento le possiamo considerare delle definizioni.

Gli intervalli $(a, +\infty)$ e $[a, +\infty)$ si dicono *semirette destre (di estremo a)*, mentre $(-\infty, a)$ e $(-\infty, a]$ si dicono *semirette sinistre*.

Osservazione. In base alla definizione precedente, l'insieme vuoto e l'insieme costituito da un solo punto sono intervalli (si chiamano anche *intervalli banali*).

Osservazione. L'intersezione di due intervalli è un intervallo (che può essere eventualmente vuoto o costituito da un sol punto, cioè essere un intervallo banale).

Osservazione. L'unione di due intervalli può non essere un intervallo (lo è, ad esempio, se l'intersezione è non vuota).

Esercizio. Mostrare che $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ non è un intervallo.

Definizione. Il *valore assoluto* di un numero reale $x \in \mathbb{R}$ è così definito:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Esempio.

$$|2| = 2 \quad |-3| = 3 \quad |0| = 0.$$

Definizione. Il *segno* di un numero reale $x \in \mathbb{R}$ è così definito:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Esempio.

$$\operatorname{sign} 3 = +1 \quad \operatorname{sign}(-2) = -1.$$

Esercizio. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$|x| = (\operatorname{sign} x)\, x\,.$$

Le proprietà fondamentali del valore assoluto sono:

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| = 0 \iff x = 0$;
3. $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ (disuguaglianza triangolare).

Ulteriori proprietà del valore assoluto che si deducono dalle precedenti sono:

4. $||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$;

5. $|x_1 x_2| = |x_1||x_2|$.

Definizione. Dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, il numero (ovviamente non negativo) $|x_1 - x_2|$ si dice *distanza* tra i due punti x_1 e x_2.

Definizione. Si dice *ampiezza* di un intervallo limitato la distanza tra i suoi estremi.

Osservazione. Gli intervalli (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ hanno tutti la stessa ampiezza, cioè $b - a$.

Esercizio. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Provare che l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

coincide con l'intervallo aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Provare che l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| > r\}$$

coincide con l'unione dei due intervalli aperti e non limitati $(-\infty, x_0 - r)$ e $(x_0 + r, +\infty)$.

Definizione. Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ ed assegnato un numero $r > 0$, l'*intorno* di x_0 di raggio r è l'insieme

$$B_r(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\big\}$$

costituito dai punti x che distano da x_0 meno di r. Pertanto, $B_r(x_0)$ coincide con l'intervallo aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$ di centro x_0 e ampiezza $2r$.

Esercizio. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$|x + 3| \leq |x - 1|\,; \quad ||x + 1| - 2| < 1; \quad \frac{|x - 1|}{|x + 4|} \leq 1; \quad \sqrt{x^2 - 3} \leq |x + 1|$$

Esercizio. Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$|x| \leq \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Provare che risulta $x = 0$.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo $x \neq 0$. Di conseguenza risulta $|x| > 0$. Consideriamo $\epsilon_0 = |x|/2$. Perciò si ha $0 < \epsilon_0 < |x|$ contro l'ipotesi. □

Definizione. $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto si dice *limitato superiormente [inferiormente]* se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq k$ $[x \geq k]$, $\forall x \in A$. Il numero k si dice un *maggiorante [minorante]* dell'insieme A.

Osservazione. Se esiste k maggiorante di A, allora ogni numero $k_1 \geq k$ è ancora un maggiorante di A. Perciò, l'insieme dei maggioranti di un insieme dato, se è non vuoto, è una semiretta non limitata superiormente.

Definizione. $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto si dice *limitato* se è limitato sia superiormente che inferiormente, cioè se esistono $h, k \in \mathbb{R}$ tali che

$$h \leq x \leq k, \quad \forall x \in A\,.$$

Esempio. L'intervallo $(-\infty, a)$ è limitato superiormente ma non inferiormente, l'intervallo $(a, +\infty)$ è limitato inferiormente ma non superiormente, l'intervallo $(a, b]$ è un insieme limitato. L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è limitato inferiormente (ogni $h \in \mathbb{R}$, $h \leq 0$ è un minorante di $\mathbb{N}$) ma, come dedurremo in seguito dalla proprietà di Archimede, non è limitato superiormente.

Una caratterizzazione degli insiemi limitati è data dalla seguente proposizione

Proposizione. $A \subseteq \mathbb{R}$ *è limitato se e solo se esiste* $K > 0$ *tale che*

$$|x| \leq K, \quad \forall x \in A.$$

Dimostrazione. Sia $K > 0$ tale che $|x| \leq K, \quad \forall x \in A$. Perciò, per quanto osservato in precedenza, $-K \leq x \leq K$ per ogni $x \in A$. Questo significa che K è un maggiorante di A e che $-K$ è un minorante di A, cioè che l'insieme A è limitato. Viceversa, supponiamo che esistano due numeri h e k tali che $h \leq x \leq k$, $\forall x \in A$. Posto $K = \max\{|h|, |k|\}$ risulta $|x| \leq K$, $\forall x \in A$. □

Definizione. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, diciamo che $M \in \mathbb{R}$ $[m \in \mathbb{R}]$ è *massimo [minimo]* di A se

1) $M \in A$ $[m \in A]$;

2) $x \leq M$ $[x \geq m]$ per ogni $x \in A$.

Si scrive $M = \max A$ $[m = \min A]$.

Osservazione. Non è difficile provare che, se un insieme ha massimo [minimo], tale massimo [minimo] è unico. Perciò si dovrà dire che un numero M è, ad esempio, **il** massimo di un insieme A e non che è **un** massimo di A.

Esempio. Il massimo dell'intervallo $(a, b]$ è b. Tale intervallo non ha minimo.

Esempio. Il minimo dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x = 1 - 1/n, n \in \mathbb{N}\}$ è 0. Proveremo dopo che tale insieme non ha massimo.

Abbiamo già osservato prima che l'insieme dei maggioranti di un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente è una semiretta destra. La proprietà fondamentale che distingue i razionali dai reali afferma che tale semiretta ha minimo, cioè è la seguente:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e limitato superiormente. Allora l'insieme dei maggioranti di A ammette minimo.

Tale proprietà si può dedurre dall'assioma di Dedekind e, anzi, si può dimostrare che è ad esso equivalente.

Essa giustifica la definizione che segue.

Definizione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e limitato superiormente. Si dice *estremo superiore* di A e si denota con $\sup A$ il minimo dei maggioranti di A. In maniera analoga si definisce *estremo inferiore* di un insieme non vuoto e limitato inferiormente il massimo dei minoranti dell'insieme.

In conseguenza di questa definizione, la proprietà precedente può essere così riformulata:

Assioma di completezza (o di continuità) dei reali. "Ogni sottoinsieme dei numeri reali non vuoto e limitato superiormente [inferiormente] ammette estremo superiore [inferiore]".

Osservazione. Estremo superiore e inferiore di un insieme essendo, rispettivamente, il "minimo" dei maggioranti ed il "massimo" dei minoranti sono unici. Inoltre essi coincidono, rispettivamente, con il massimo ed il minimo dell'insieme quando questi esistono.

Esempio. L'estremo superiore dell'intervallo aperto (a, b) di $\mathbb{R}$ è b. Basta infatti osservare che l'insieme dei maggioranti di (a, b) è la semiretta $[b, +\infty)$. Notiamo che l'estremo superiore dell'intervallo $(a, b]$ è ancora b. Infatti l'insieme dei maggioranti di $(a, b]$ è ancora la semiretta $[b, +\infty)$. In questo secondo caso l'estremo superiore è anche il massimo dell'intervallo.

In maniera analoga si prova che $\inf(a, b) = a$ e che $\inf[a, b) = \min[a, b) = a$.

Due importanti conseguenze dell'assioma di Dedekind sono le seguenti:

Teorema (Proprietà di Archimede.) *Per ogni coppia di numeri reali positivi* x, y, *esiste* $n \in \mathbb{N}$ *tale che* $n\,x > y$.

Osservazione. Dalla proprietà di Archimede, prendendo $x = 1$, si deduce che l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente.

Teorema. (Proprietà di densità.) *L'insieme* $\mathbb{Q}$ *dei razionali è denso in* $\mathbb{R}$, *vale a dire, per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$ *con* $x < y$, *esiste* $r \in \mathbb{Q}$ *tale che* $x < r < y$.

Proposizione. (Caratterizzazioni dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore di un insieme limitato). *Dato* $l \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\sup A = l \quad [\inf A = l] \iff \begin{cases} 1)\ x \leq l,\ \forall x \in A\,; \quad [x \geq l,\ \forall x \in A\,] \\ 2)\ \forall \epsilon > 0,\ \exists\, x_\epsilon \in A : l - \epsilon < x_\epsilon\ [l + \epsilon > x_\epsilon]. \end{cases}$$

Esempio. Usando la caratterizzazione dell'estremo superiore diamo una nuova dimostrazione del fatto che $\sup(a, b) = b$. Infatti, essendo $a < x < b$, la prima condizione della caratterizzazione è ovviamente soddisfatta. Inoltre, dato $\epsilon > 0$ e tale che $\epsilon < b - a$, il punto $x_\epsilon = b - \epsilon/2$ è tale che $b - \epsilon < x_\epsilon < b$. Ovviamente, se $\epsilon \geq b - a$ ogni $x \in (a, b)$ è tale che $b - \epsilon < x$. $\square$

Esempio. Dalla proprietà di Archimede si deduce che

$$\inf\{x \in \mathbb{R} : x = 1/n, n \in \mathbb{N}\} = 0\,.$$

Analogamente si ha

$$\sup\{x \in \mathbb{R} : x = 1 - 1/n, n \in \mathbb{N}\} = 1\,.$$

Esempio. Sia

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n(1 - 1/n^2), n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Allora si ha $\sup A = 1; \quad \inf A = -1$.

Usando la caratterizzazione precedente, proviamo che l'estremo superiore dell'insieme A vale 1. Ovviamente $(-1)^n(1 - 1/n^2) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, cioè 1 è un maggiorante. Inoltre, se $0 < \epsilon < 1$, la relazione $1 - \epsilon < (-1)^n(1 - 1/n^2)$ è soddisfatta prendendo n pari, $n > 1/\sqrt{\epsilon}$. Se invece $\epsilon \geq 1$, ogni n pari è tale che la condizione 2) è soddisfatta, cioè, per ogni $\epsilon > 0$, $1 - \epsilon$ non è un maggiorante di A. $\square$

Notazione. Per convenzione, se un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato superiormente [inferiormente] si pone

$$\sup A = +\infty, \quad [\inf A = -\infty] .$$

Esercizio. Sia

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n n, n \in \mathbb{N}\} .$$

Provare che $\sup A = +\infty$ e che $\inf A = -\infty$.

Funzioni

Definizione. Una legge $f\colon X \to Y$, che ad ogni elemento x di un insieme X, detto il *dominio* di f, associa un unico elemento $y = f(x)$ di un insieme Y, detto il *codominio* si dice una *funzione (o applicazione)* tra i due insiemi X e Y.

Per indicare che f associa ad un generico elemento $x \in X$ l'elemento $f(x) \in Y$, talvolta si usa la notazione $f\colon x \mapsto f(x)$. Ad esempio, la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ si denota anche $f\colon x \mapsto x^2$.

Data una funzione $f\colon X \to Y$ e dato un sottoinsieme A di X, l'*immagine* di A (tramite f) è il sottoinsieme $f(A)$ del codominio Y di f costituito dagli elementi y che sono immagine di almeno un $x \in A$. In simboli:

$$f(A) = \Big\{y \in Y : y = f(x) \text{ per almeno un } x \in A\Big\}.$$

L'immagine $f(X)$ di tutto il dominio si chiama anche *immagine di f* e si denota col simbolo $\mathrm{im}f$ (oltre ovviamente che con $f(X)$).

Un esempio di funzione è la legge che ad ogni studente dell'aula associa la prima lettera del suo cognome. Il dominio, in questo caso, è l'insieme degli studenti presenti in aula. Una possibile scelta del codominio, è l'insieme di tutte le lettere dell'alfabeto. L'immagine della funzione è l'insieme costituito dalle lettere che corrispondono ad almeno uno studente presente in aula (è molto probabile che sia un sottoinsieme proprio del codominio, e in tal caso diremo che la funzione non è suriettiva).

Funzioni *reali*: quando il codominio è un sottoinsieme dei reali che, per semplicità, supporremo coincidere con $\mathbb{R}$.

Funzioni reali di *variabile reale*: sono funzioni reali il cui dominio è un sottoinsieme dei reali.

Data una funzione $f\colon X \to Y$ e dato un sottoinsieme B del suo codominio Y, la *retroimmagine* (o *controimmagine* o *immagine inversa* o *preimmagine*) di B

(tramite f) è il sottoinsieme (eventualmente vuoto) $f^{-1}(B)$ di X costituito dagli elementi la cui immagine sta in B. In simboli:

$$f^{-1}(B) = \Big\{x \in X : f(x) \in B\Big\}.$$

Analogamente, se $B = \{y\}$, dove y è un elemento di Y fissato, e si ha

$$f^{-1}(\{y\}) = \Big\{x \in X : f(x) = y\Big\}.$$

Ad esempio, per $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ risulta $f^{-1}(\{3\}) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, $f^{-1}(\{-4\}) = \emptyset$, $f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2]$ e $f^{-1}((1, 4]) = [-2, -1) \cup (1, 2]$.

Definizione. Si dice *grafico* di una funzione $f\colon X \to Y$ e si denota con $\operatorname{graf} f$ il sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$ costituito dalle coppie (x, y) che verificano la condizione $y = f(x)$ (che è detta equazione del grafico). Si ha cioè

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}\,.$$

Osservazione. Il grafico di una funzione reale di variabile reale può essere pensato come un sottoinsieme del piano cartesiano. Ovviamente, non tutti i sottoinsiemi del piano sono grafici di una funzione reale di variabile reale $x \mapsto f(x)$. Ad esempio l'insieme

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\Big\}$$

non è un grafico, mentre lo è

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\Big\}.$$

Esercizio. Scrivere in forma esplicita la funzione $x \mapsto f(x)$ il cui grafico è dato da

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - x = 4,\ y \geq 0\Big\}$$

e determinarne il dominio.

3^a settimana - dal 30.09.19

Definizione. Una funzione $f\colon X \to Y$ si dice *iniettiva* se da $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ segue $f(x_1) \neq f(x_2)$ o, equivalentemente, se dati $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$ si ha $x_1 = x_2$, o, ancora, se per ogni $y \in Y$ esiste al più un $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

Definizione. Una funzione $f\colon X \to Y$ si dice *suriettiva* se per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

Osservazione. Una funzione è suriettiva se e solo se la sua immagine coincide col suo codominio.

Definizione. Una funzione $f\colon X \to Y$ si dice *biiettiva* o, anche, *corrispondenza biunivoca* se è iniettiva e suriettiva, cioè se per ogni $y \in Y$ esiste uno e un solo $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

Esempio. La funzione che ad ogni studente presente in aula associa il suo codice fiscale è ovviamente iniettiva, mentre non lo è quella che ad ogni studente in aula fa corrispondere l'iniziale del suo cognome (possiamo affermarlo con certezza, dato che gli studenti presenti sono più del numero delle lettere dell'alfabeto).

Esempio. La funzione reale di variabile reale $x \mapsto 3x + 2$ è biiettiva.

Esempio. Consideriamo la funzione $x \mapsto x^3 - x$. Vedremo in seguito che (come conseguenza del teorema dei valori intermedi) tale funzione è suriettiva. Essa non è però iniettiva perché l'equazione $x^3 - x = 0$ ammette più di una soluzione (verificarlo per esercizio).

Definizione. Data $f\colon X \to Y$ e dato un sottoinsieme A di X, se si pensa f definita soltanto per gli elementi di A, si dice che f è stata ristretta ad A o, anche, che si considera una *restrizione* di f ad A. La restrizione di f ad A si denota $f|_A\colon A \to Y$.

Esempio. La funzione reale di variabile reale $x \mapsto x^2$ non è iniettiva nel suo dominio, mentre la sua restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$ è iniettiva.

Definizione. Dato un insieme X, la funzione da X in X che ad ogni $x \in X$ fa corrispondere x stesso è detta *identità* in X ed è denotata con I_X. In altre parole, l'identità in X è la funzione $I_X\colon X \to X$ definita da $I_X(x) = x$.

Definizione. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ due funzioni. La *composizione* di f con g, denotata $g{\circ}f$, è quell'applicazione (detta anche *funzione composta*) che ad ogni $x \in X$ associa il numero $g(f(x)) \in Z$. Più in generale, può accadere che la funzione g sia definita in un sottoinsieme Y_0 di Y. In tal caso, la composizione ha senso quando è non vuota l'intersezione di Y_0 con im$f$ e il dominio di $g \circ f$ è ovviamente il sottoinsieme di X

$$X_0 = \{x \in X : f(x) \in Y_0\}$$

Tale insieme non è altro che $f^{-1}(Y_0)$, cioè, per quanto visto in precedenza, è l'immagine inversa di Y_0 (tramite f).

Esempio. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, e sia $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt{y}$. Allora il dominio di $g \circ f$ è il sottoinsieme

$$X_0 = \big\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\big\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

e $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Esercizio. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ due funzioni. Provare che:

$$f, g \text{ iniettive} \implies g \circ f \text{ iniettiva}$$

$$f, g \text{ suriettive} \implies g \circ f \text{ suriettiva}$$

$$g \circ f \text{ iniettiva} \implies f \text{ iniettiva}$$

$$g \circ f \text{ suriettiva} \implies g \text{ suriettiva}$$

Definizione. Data una funzione iniettiva $f\colon X \to Y$, la sua *funzione inversa*, denotata f^{-1}, è quella legge che ad ogni y dell'immagine di f associa l'unico elemento $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

Esempio. Come già osservato, la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 3x + 2$ è biiettiva. Pertanto è definita la funzione inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si ha $f^{-1}(y) = (y - 2)/3$.

Esempio. La funzione $f(x) = e^x$ ha come dominio $\mathbb{R}$ e come immagine l'intervallo $(0, +\infty)$ mentre la sua inversa $f^{-1}(y) = \log y$ ha come dominio $(0, +\infty)$ e come immagine $\mathbb{R}$. La funzione $f(x) = x^2 + 1$ non è iniettiva nel suo dominio, cioè in $\mathbb{R}$. Risulta invece iniettiva la sua restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$. L'inversa di tale restrizione è la funzione $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}$ che ha come dominio $[1, +\infty)$ e come immagine $[0, +\infty)$.

È bene precisare che in alcuni testi di Analisi Matematica vengono dette invertibili soltanto le funzioni biiettive (cioè iniettive e suriettive). Noi preferiamo chiamare invertibili le funzioni solamente iniettive (senza richiedere la suriettività). In tal caso il dominio della funzione inversa coincide con l'immagine della funzione che si inverte.

È immediato verificare che se $f\colon X \to Y$ è iniettiva, allora

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ \forall x \in X, \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(y)) = y,\ \forall y \in f(X).$$

In altre parole si ha $f^{-1} \circ f = I_X$ e $f \circ f^{-1} = I_{f(X)}$, dove ricordiamo che I_X e $I_{f(X)}$ denotano l'identità in X e in $f(X)$ rispettivamente.

Funzioni reali di variabile reale

Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione il cui dominio è un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$. Poiché in $\mathbb{R}$ abbiamo introdotto un ordinamento, ha senso dare la seguente definizione.

Definizione. Diremo che $f\colon A \subseteq X \to \mathbb{R}$ è *crescente [strettamente crescente]* in A se da $x_1, x_2 \in A$ e $x_1 < x_2$ segue $f(x_1) \leq f(x_2)$ $[f(x_1) < f(x_2)]$.

Osservazione. Le funzioni strettamente crescenti sono anche crescenti.

In maniera analoga si definisce una funzione *decrescente* oppure *strettamente decrescente.*

L'espressione

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2\,,$$

è detta *rapporto incrementale* ed è $\geq 0\,[\leq 0]$ se f è crescente [decrescente]. Ovviamente, risulta

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \quad \forall x_1 \neq x_2\,.$$

Si chiamano *funzioni [strettamente] monotòne* le funzioni [strettamente] crescenti o [strettamente] decrescenti; ossia quelle per cui il prodotto $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1))$, con x_1 e x_2 nel dominio, non cambia mai di segno.

Osservazione. È immediato verificare che le funzioni strettamente monotone sono iniettive. Osserviamo che il viceversa in generale è falso. Ad esempio, la funzione $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1), \\[2ex] 3 - x & x \in [1,2]\,, \end{cases}$$

è iniettiva ma non è monotona in [0,2].

Osservazione. L'inversa di una funzione strettamente crescente [decrescente] è strettamente crescente [decrescente].

Definizione e grafici delle funzioni: valore assoluto, segno, gradino di Heaviside, parte intera (denotata $x \mapsto [x]$), mantissa (cioè la funzione $x \mapsto x - [x]$).

Definizione e grafici delle seguenti funzioni: lineari, potenze, esponenziale e logaritmo.

Osservazione. Si fa presente che, data $f\colon X \to \mathbb{R}$, col simbolo $f(x)$ si dovrebbe intendere il valore che la funzione f assume nel punto $x \in X$. In altre parole, a rigore, $f(x)$ rappresenta un numero e non una funzione. Talvolta però, per abuso di linguaggio (e per tradizione), con $f(x)$ intenderemo la funzione f, e la lettera x (detta variabile indipendente) rappresenterà un generico elemento del dominio e non un punto fissato. Comunque, se $f(x)$ rappresenta un numero o una funzione si capisce dal contesto. Ad esempio, $f(2)$ rappresenta inequivocabilmente un numero (il valore assunto da f nel punto 2), così come la notazione $f(x_0)$ denota presumibilmente il valore assunto da f in un punto x_0 fissato. A volte, per indicare ad esempio la funzione coseno non scriveremo cos (come a rigore si dovrebbe fare) ma $\cos x$ o $\cos t$ o $\cos \theta$, ecc. (la lettera usata per rappresentare la variabile indipendente è spesso suggerita dal suo significato fisico o geometrico).

Definizione. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice *pari* in X se $-x \in X$ per ogni $x \in X$ e $f(x) = f(-x)$.

Definizione. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice *dispari* in X se $-x \in X$ per ogni $x \in X$ e $f(x) = -f(-x)$.

Definizione. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice *periodica di periodo* $T > 0$ se $x + T \in X$ per ogni $x \in X$ e $f(x + T) = f(x)$.

Le *funzioni trigonometriche seno, coseno, tangente* e loro principali proprietà.

Osservazione. Vale l'uguaglianza $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Osservazione. Se una funzione è periodica di periodo T, allora è periodica anche di periodo $2T$, $3T$, ecc. Pertanto, una funzione periodica ha infiniti periodi. Il più piccolo tra tutti si chiama *periodo minimo.*

Si osservi che la somma, il prodotto e il quoziente di funzioni periodiche, tutte dello stesso periodo T, è ancora una funzione periodica di periodo T. La minimalità del periodo, tuttavia, non si conserva con tali operazioni. Ad esempio, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sono periodiche di periodo 2π, e quindi, per quanto detto, è periodica di periodo 2π anche la funzione $\operatorname{tang} x := \operatorname{sen} x/ \cos x$; ma mentre 2π è il periodo minimo per le prime due funzioni, non lo è per la terza (il periodo minimo di $\operatorname{tang} x$ è π).

Esempi di funzioni pari: le costanti, x^2, $1/x^2$, x^4, x^{2k} (con $k \in \mathbb{Z}$), $\cos x$, $\cos 3x$, $1/\cos x$, $1 - x^2 \cos x$, $x \operatorname{tang} x$, $|x|e^{-x^2} - x^2 \cos x$.

Esempi di funzioni dispari: $1/x^3$, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 3x$, $1/\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} x \cos x$, $\operatorname{tang} x$, $xe^{-x^2} - x^2 \operatorname{sen} x$.

Esempi di funzioni periodiche: le costanti, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 3x$, $1/\operatorname{sen} x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{sen} x \cos x$, $\operatorname{sen} 2x + 3 \cos 5x$.

Le *funzioni trigonometriche inverse arcoseno, arcocoseno, arcotangente*: loro dominio, immagine e grafico.

Definiamo la funzione arcoseno. A questo scopo, osserviamo che la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ (essendo periodica) non è ovviamente iniettiva in $\mathbb{R}$, mentre lo è la sua restrizione all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Ha senso perciò definire la funzione inversa di tale restrizione. Questa inversa è detta *funzione arcoseno*, e ha come dominio l'intervallo $[-1, 1]$ e come immagine l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Inoltre, essa è strettamente crescente, essendo l'inversa di una funzione strettamente crescente.

In maniera analoga si possono definire le funzioni arcocoseno e arcotangente. L'*arcocoseno* è l'inversa della restrizione del coseno all'intervallo $[0, \pi]$. Ha come dominio l'intervallo $[-1, 1]$ e come immagine l'intervallo $[0, \pi]$. L'*arcotangente* è l'inversa della restrizione della tangente all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Ha come dominio $\mathbb{R}$ e come immagine l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Osservazione. La funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

è tale che non si può disegnarne il grafico.

Definizione. Data una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$, la funzione $|f|\colon X \to \mathbb{R}$ cosí definita $|f|(x) = |f(x)|$ è detta *valore assoluto di f*.

Esercizio. Disegnare il grafico della funzione $x \mapsto |x^2 - 4|$.

Esercizio. Disegnare il grafico della funzione $x \mapsto |\log x|$.

Esercizio. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\log |x| + \log |x + 1| < 1\,;$$

$$\frac{|\cos 2x|}{|\operatorname{sen} x|} \leq 1\,.$$

Esercizio. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1 - |x|| < 3\}, B_k = \{x \in \mathbb{R} : e^x \geq k\}, C = \{k \in \mathbb{R} : B_k \subseteq A\}$. Stabilire se $1 \in C$ e se C contiene l'intervallo $(2, +\infty)$.

Le nozioni di maggiorante e minorante di un insieme si applicano in particolare all'insieme immagine di un insieme X tramite una funzione reale f. In altre parole, data $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice che f è *limitata superiormente [inferiormente] in* X se esiste una costante $k\,[h]$ tale che

$$f(x) \leq k, \quad \forall x \in X \quad [f(x) \geq h, \quad \forall x \in X].$$

Si dice che f è *limitata in* X se è limitata sia superiormente che inferiormente in X, cioè se esistono due costanti h e k tali che

$$h \leq f(x) \leq k, \quad \forall x \in X.$$

Esempi di funzioni limitate nel loro dominio sono il seno, l'arcotangente e la mantissa. La funzione $f(x) = 1/x$ non è limitata inferiormente né superiormente nel suo dominio (cioè in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), mentre è limitata inferiormente ma non superiormente in $X = (0, +\infty)$ ed è limitata, per esempio, in $X = (1, +\infty)$.

In maniera analoga a quanto si può provare per gli insiemi si ha il seguente risultato:

Proposizione. *Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ è limitata in X se e solo se esiste $K > 0$ tale che $|f(x)| \leq K$ per ogni $x \in X$.*

Come per la limitatezza, anche le nozioni di estremo superiore e estremo inferiore di un insieme si applicano in particolare all'insieme immagine di un insieme X tramite una funzione reale f. Più precisamente

Definizione. Data $f\colon X \to \mathbb{R}$ si definisce *estremo superiore [inferiore] di f in X* l'estremo superiore [inferiore] dell'insieme $f(X)$.

Si scrive

$$\sup_{x \in X} f(x) \quad [\inf_{x \in X} f(x)]$$

o, anche,

$$\sup_X f \quad [\inf_X f]$$

Proposizione. (Caratterizzazioni dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore di una funzione limitata). *Dato* $l \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$l = \sup_{x\in X} f(x) \quad [l = \inf_{x\in X} f(x)] \iff$$

$$\begin{cases} 1)\ f(x) \leq l,\ [f(x) \geq l,] \quad \forall x \in X\,; \\ 2)\ \forall \epsilon > 0, \exists\, x_\epsilon \in X : l - \epsilon < f(x_\epsilon) \quad [l + \epsilon > f(x_\epsilon)]. \end{cases}$$

Definizione. Data $f\colon X \to \mathbb{R}$ si definisce *massimo [minimo] assoluto (o globale) di f in X* il massimo [minimo] dell'insieme $f(X)$. In altre parole, $M \in \mathbb{R}\,[m \in \mathbb{R}]$ è il massimo [minimo] assoluto di f in X se esiste $x_0 \in X$, detto *punto di massimo [minimo] assoluto*, tale che

1) $M = f(x_0) \quad [m = f(x_0)]$;

2) $f(x) \leq M \quad [f(x) \geq m]$ per ogni $x \in X$.

Si scrive

$$M = \max_{x\in X} f(x) \quad [m = \min_{x\in X} f(x)]$$

oppure

$$M = \max_X f \quad [m = \min_X f].$$

Osservazione. Se il massimo [minimo] assoluto di una funzione esiste, esso ovviamente è unico e coincide con l'estremo superiore [inferiore] di f in X.

N.B. I punti di massimo [minimo] assoluto (che possono essere più di uno) appartengono al dominio della funzione, mentre il massimo [minimo] appartiene all'immagine della funzione.

Esempio. Il massimo di $\cos x$ è 1, mentre i punti di massimo sono infiniti (sono i numeri $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$). Il minimo di $\cos x$ è -1 ed è assunto nei punti $x = (2k+1)\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$

Esempio. La funzione $f(x) = \operatorname{arctang} x$ non ha né massimo né minimo in $\mathbb{R}$ pur essendo una funzione limitata. Si ha

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctang} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \inf_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctang} x = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Esempio. Il massimo di

$$f(x) = \frac{3}{1 + |x+2|}$$

vale 3 ed è assunto nel punto in cui è minima la funzione $|x+2|$. Pertanto f ha come unico punto di massimo $x=-2$. Poiché $f(x)>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, 0 è un minorante per f ma non è il minimo di f. Dato che il denominatore di $f(x)$ si può rendere arbitrariamente grande, è lecito supporre che 0 sia l'estremo inferiore di f (cioè il massimo dei minoranti di f). Per provare che effettivamente $0=\inf f$, in base alla caratterizzazione, occorre mostrare che se $\epsilon>0$, allora ϵ non è un minorante; ossia esiste un x_ϵ per il quale si ha $f(x_\epsilon)<\epsilon$. In altre parole, occorre provare che, dato un arbitrario $\epsilon>0$, la disequazione

$$\frac{3}{1+|x+2|}<\epsilon$$

ammette almeno una soluzione (verificarlo per esercizio).

Esercizio. Provare che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}=\max_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}=f(0)=1\,.$$

Inoltre

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}=0$$

e, ovviamente, il minimo non esiste.

Esercizio. Provare che

$$\sup_{x>0}e^{-1/x^2}=1\,,\quad \inf_{x>0}e^{-1/x^2}=0\,.$$

Esercizio. Provare che

$$\sup_{x>0}\,(x-[x])=1$$

dove $[x]$ denota la parte intera di x.

Osservazione. Molte volte, nello studio delle funzioni reali di una variabile, invece di assegnare a priori il dominio di una data funzione f, si usa assegnare una espressione $f(x)$ e stabilire a posteriori quale è il più grande sottoinsieme di punti x di $\mathbb{R}$ per i quali $f(x)$ "ha senso", cioè per i quali $f(x)\in\mathbb{R}$. Tale sottoinsieme viene detto *dominio naturale* di f o, anche, *insieme di definizione* o *campo di esistenza* di f e denotato dom$f$ o, anche, $D(f)$.

Esempio. Sia data $f(x)=\sqrt{x^2-1}$. Il dominio naturale di f è dato da

$$\{x\in\mathbb{R}:x^2-1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq 1\}.$$

Perciò

$$\operatorname{dom} f=(-\infty,1]\cup[1,+\infty).$$

Definizione (di funzione combinata). Date due funzioni reali di variabile reale f e g, la loro somma $f+g$, il loro prodotto fg, il loro quoziente f/g e la loro composizione $g\circ f$ si definiscono nel modo seguente:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
2. $(fg)(x) = f(x)g(x)$;
3. $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$;
4. $(g\circ f)(x) = g(f(x))$.

Il dominio di ciascuna di queste quattro funzioni (ottenute combinando f e g mediante le operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione) è dato dall'insieme dei numeri reali x per cui ha senso l'operazione che la definisce. Per esempio, il dominio di $f+g$ è l'insieme dei numeri x per cui ha senso scrivere sia $f(x)$ sia $g(x)$, altrimenti non è definita la somma $f(x)+g(x)$. Pertanto $\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$. Analogamente $\operatorname{dom}(fg) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, $\operatorname{dom}(f/g) = \{x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g : g(x) \neq 0\}$ e $\operatorname{dom} g\circ f = \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) \in \operatorname{dom} g\} = f^{-1}(\operatorname{dom} g)$.

Esercizio. Stabilire l'insieme di definizione di

$$f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-4}}\,.$$

Si dovrà avere $x^2-4>0$ perché sia definita la radice al denominatore e $|x+1| \leq \sqrt{x^2-4}$ perché sia definito l'arcoseno. Si ottiene perciò $\operatorname{dom} f = (-\infty, -5/2]$.

4^a **settimana - dal 7.10.19**

Limiti

Ricordiamo che, dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ ed assegnato un numero $\delta > 0$, l'*intorno* di x_0 di raggio δ è l'intervallo non banale

$$B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

costituito dai punti x che distano da x_0 meno di δ.

Definizione. Si dice *intorno forato* di un punto x_0 di raggio δ l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\} = B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Definizione. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di *accumulazione* per un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ se in ogni intorno forato di x_0 cadono punti di X, cioè se per ogni $\delta > 0$ risulta $X \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Osservazione. Dalla definizione sopra si deduce che se x_0 è di accumulazione per un insieme X, allora ogni intorno di x_0 contiene **infiniti** punti di X. Supponiamo infatti che esista un intorno di x_0 contenente un numero finito di punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $X \setminus \{x_0\}$. Sia $\bar{\delta} = \min\{|x_i - x_0|, i = 1, \ldots, n\}$ e sia $0 < \delta < \bar{\delta}$. Si ha $X \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \emptyset$, che contraddice l'ipotesi che x_0 sia punto di accumulazione per X.

Esempio.

- L'insieme
$$X = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n}{n},\, n \in \mathbb{N}\}$$
ha come unico punto di accumulazione 0 che non appartiene ad X. Proviamo che 0 è di accumulazione per X. Fissato $\delta > 0$, sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 > 1/\delta$. Si ha $0 < 1/n_0 < \delta$ e quindi $X \cap (-\delta, \delta) \neq \emptyset$.
- L'insieme
$$X = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n(1 - \frac{1}{n}),\, n \in \mathbb{N}\}$$
ha come punti di accumulazione 1 e -1 entrambi non appartenenti ad X.
- L'insieme dei punti di accumulazione sia dell'intervallo (a, b) che dell'intervallo $[a, b]$ è $[a, b]$.
- Ricordando che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali è denso in $\mathbb{R}$, si ottiene che l'insieme dei punti di accumulazione dell'insieme $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ è $[a, b]$.

Definizione. I punti di un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ che non sono di accumulazione per X si dicono punti *isolati* di X. In altre parole, $x_0 \in X$ si dice punto isolato se esiste $\delta > 0$ tale che $X \cap B_\delta(x_0) = \{x_0\}$.

Esempio.

– I punti dell'insieme

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x = 1/n, n \in \mathbb{N}\}$$

sono tutti isolati.

Infatti, fissiamo $x_0 = 1/n_0$. Si ha

$$\frac{1}{n_0+1} < x_0 < \frac{1}{n_0-1},$$

da cui, scegliendo

$$\delta \leq \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1},$$

risulta $X \cap B_\delta(x_0) = \emptyset$.

– L'insieme $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito tutto da punti isolati.

Il teorema che segue è una importante conseguenza della proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ e fornisce una condizione sufficiente affinché un insieme in $\mathbb{R}$ possegga punti di accumulazione.

Teorema (Principio di Bolzano-Weierstrass). *Ogni insieme limitato e infinito di $\mathbb{R}$ ammette almeno un punto di accumulazione.*

Osservazione. Le ipotesi del Principio di Bolzano-Weierstrass non possono essere indebolite. Infatti, un esempio di un insieme infinito di $\mathbb{R}$ privo di punti di accumulazione è $\mathbb{N}$ (che è non limitato), mentre un esempio di un insieme limitato privo di punti di accumulazione è $X = \{1, 2, 3\}$ (che ovviamente non è infinito).

Definizione (di limite finito-finito). Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e sia x_0 un punto di accumulazione per il dominio X di f. Si dice che $f(x)$ tende ad un numero reale l per x che tende ad x_0 se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ (dipendente da ϵ) tale che da $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in X$ segue $|f(x) - l| < \epsilon$.

Notazione. Per indicare che $f(x)$ tende a l per x che tende ad x_0 si scrive

$$f(x) \to l \quad \text{per} \quad x \to x_0.$$

Si usa anche dire che il *limite per x che tende ad x_0 di $f(x)$ è uguale a l* e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Osservazione. Il punto x_0 è di accumulazione per X, ma può non appartenere a X. Ad esempio la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x/x$ ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma ha senso fare il limite di $\operatorname{sen} x/x$ per $x \to 0$, essendo 0 punto di accumulazione per il dominio di f. Vedremo in seguito che tale limite vale 1.

Osservazione. Nel caso in cui $x_0 \in X$, l'eventuale valore di f in x_0, cioè $f(x_0)$, non influisce sul valore del limite di $f(x)$ per $x \to x_0$. Ad esempio, data la funzione $f(x) = [\cos x]$, si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$, (ricordiamo che $[\cdot]$ denota la parte intera).

Esercizio. Verificare, usando la definizione di limite, che

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + x) = 2.$$

Suggerimento. Si tratta di verificare che, preso $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $0 < |x - 1| < \delta$ risulta $|x^2 + x - 2| < \epsilon$. Risolvendo la disequazione $2 - \epsilon < x^2 + x < 2 + \epsilon$, si trova

$$\delta_\epsilon = \min\left\{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \epsilon}, -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \epsilon}\right\}$$

che fornisce l'intorno di $x_0 = 1$ cercato.

Definizione (di limite finito-infinito). Sia x_0 un punto di accumulazione per il dominio di $f\colon X \to \mathbb{R}$. Si dice che $f(x)$ tende a $+\infty$ (risp. $-\infty$) per x che tende ad x_0 se **per ogni** $M \in \mathbb{R}$ **esiste** $\delta > 0$ tale che da $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in X$ segue $f(x) > M$ (risp. $f(x) < M$).

Esempio. Verifichiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty\,.$$

Infatti, fissato un arbitrario $M \in \mathbb{R}$, studiamo la disequazione $1/x^2 > M$ e proviamo che è soddisfatta in un intorno forato di $x_0 = 0$ (cioè un intorno di x_0 privato del punto x_0). Se $M \leq 0$, essendo $x^2 > 0$, la disuguaglianza è soddisfatta per ogni $x \neq 0$, cioè come intorno forato di 0 si può prendere $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $M > 0$ tale disequazione è equivalente a $0 < x^2 < 1/M$. Quindi $1/x^2 > M$ se (e solo se) $0 < |x| < 1/\sqrt{M}$. Di conseguenza, si può prendere un qualunque intorno forato di raggio (positivo) $\delta \leq 1/\sqrt{M}$.

Esercizio. Usando la definizione di limite verificare che

$$\lim_{x\to -2} \frac{x}{(x+2)^2} = -\infty\,.$$

Definizione (di limite infinito-finito). Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e supponiamo che X non sia limitato superiormente, cioè che ogni semiretta destra $(a, +\infty)$ contenga infiniti punti di X (per brevità si dice che "$+\infty$ è un punto di accumulazione per X"). La funzione $f(x)$ *tende ad un numero reale* l *per* x *che tende a* $+\infty$ se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $a \in \mathbb{R}$ tale che da $x > a$ e $x \in X$ segue $|f(x)-l| < \epsilon$. Analogamente, se X non è limitato inferiormente, cioè se ogni semiretta $(-\infty, a)$ contiene infiniti punti di X, (o, anche, se "$-\infty$ è un punto di accumulazione per X"), si dice che $f(x)$ *tende ad* $l \in \mathbb{R}$ *per* x *che tende a* $-\infty$ se fissato $\epsilon > 0$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che da $x < a$ e $x \in X$ segue $|f(x)-l| < \epsilon$.

Esempio. Verifichiamo che la funzione $1/x$ tende a zero per $x \to -\infty$ (tende a zero anche per $x \to +\infty$). Infatti, fissato $\epsilon > 0$, mostriamo che esiste un intorno di $-\infty$ (cioè una semiretta sinistra) in cui è soddisfatta la disequazione $|1/x - 0| < \epsilon$. Poiché $x \to -\infty$ si può supporre che x sia negativo (infatti per la verifica del limite basta restringere la funzione $1/x$ all'intorno $(-\infty, 0)$ di $-\infty$). Per $x < 0$ la disequazione $|1/x - 0| < \epsilon$ è equivalente a $-1/x < \epsilon$. Moltiplicando per x entrambi i membri di quest'ultima disequazione (e tenendo conto che x è negativo) si ottiene $-1 > \epsilon x$. Dato che $\epsilon > 0$, dalla moltiplicazione di entrambi i membri dell'ultima disequazione per $1/\epsilon$ si ottiene $-1/\epsilon > x$. Possiamo quindi concludere che, fissato $\epsilon > 0$, la disuguaglianza $|1/x - 0| < \epsilon$ è soddisfatta per $x < a$, dove $a = -1/\epsilon$ (o un qualunque altro numero minore di $-1/\epsilon$).

Esercizio. Usando la definizione di limite verificare che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2+2} = 0\,, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{|x|+1}{x-1} = 1\,, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|+1}{x-1} = -1\,.$$

Esercizio. Formulare la definizione di limite nel caso infinito-infinito.

Introduciamo anche la nozione di **limite laterale destro [sinistro]**.

Definizione. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, l'intervallo $[x_0, x_0 + \delta)$ si dice *intorno destro* di x_0 di ampiezza o raggio δ, mentre l'intervallo $(x_0 - \delta, x_0]$ si dice *intorno sinistro* di x_0. Inoltre, chiameremo *intorno forato destro* di x_0 di ampiezza e raggio δ l'intervallo aperto $(x_0, x_0 + \delta)$ e *intorno forato sinistro* l'intervallo $(x_0 - \delta, x_0)$.

Per semplicità di linguaggio, introducendo i simboli x_0^- e x_0^+, chiameremo *intorno (forato) di* x_0^- *[intorno (forato) di* x_0^+*]* un intorno (forato) sinistro [destro] di x_0.

Definizione. Dato un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ e dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che x_0 è un *punto di accumulazione destro[sinistro]* per X (o, equivalentemente, che il simbolo x_0^+ [x_0^-] è un *punto di accumulazione* per X), se in ogni intorno destro [sinistro] di x_0 cadono punti di X diversi da x_0 (o, equivalentemente, se in ogni intorno di x_0^+ [intorno di x_0^-] cadono punti di X diversi da x_0 o, ancora in maniera equivalente, se in ogni intorno forato destro [sinistro] di x_0 cadono punti di X).

Ovviamente x_0 è di accumulazione per X se e solo se x_0 è di accumulazione destro **oppure** sinistro per X.

Esempio.

– Consideriamo l'insieme

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x = 1/n,\, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Il punto $x_0 = 0$ è un punto di accumulazione destro per tale insieme.

– Consideriamo l'insieme

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n(1 - 1/n),\, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Il punto 1 è di accumulazione sinistro per X, mentre -1 è di accumulazione destro.

Definizione (di limite laterale destro). Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e sia x_0 un punto di accumulazione destro per il dominio X di f. Si dice che $f(x)$ *tende ad un numero reale l per x che tende a x_0^+* (o per x che tende a x_0 da destra), se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ (dipendente da ϵ) tale che se x appartiene all'intorno forato di x_0^+ di raggio δ (cioè se $x \in (x_0, x_0 + \delta)$) e x sta in X, si ha $|f(x) - l| < \epsilon$. Tale limite è detto *limite destro*. In maniera analoga si definisce il limite sinistro.

Come per gli altri casi già incontrati, per esprimere simbolicamente il limite destro [sinistro] si usa la notazione

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \qquad \left[\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l\right]$$

che viene letta "limite per x che tende ad x_0^+ [x_0^-] di $f(x)$ uguale a l". Un'altra notazione usata è la seguente:

$$f(x) \to l \;\text{ per } x \to x_0^+ \;\left[\text{per } x \to x_0^-\right],$$

che si legge "$f(x)$ tende a l per x che tende a x_0^+ $[x_0^-]$".

Esercizio. Formulare le definizioni di limite sinistro e destro nel caso che il limite sia $+\infty$ oppure $-\infty$.

Da ora in avanti, con la notazione $\mathbb{R}^*$ intenderemo l'insieme dei *numeri reali estesi*, ossia l'insieme costituito dai numeri reali con l'aggiunta dei simboli $-\infty$ e $+\infty$. Si ha cioè

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}\,.$$

In $\mathbb{R}^*$, per quanto riguarda la relazione d'ordine, si fa la convenzione che ogni numero reale sia maggiore di $-\infty$ e minore di $+\infty$.

Teorema. *Sia f una funzione reale di variabile reale e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione sia sinistro che destro per il dominio di f e sia $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$$

se e solo se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda.$$

Esempio. Come applicazione del teorema mostriamo che il limite della funzione $\operatorname{sign} x$ per $x \to 0$ non esiste. Infatti, essendo $\operatorname{sign} x = -1$ per $x < 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sign} x = -1.$$

Analogamente, dato che $\operatorname{sign} x = 1$ per $x > 0$, risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sign} x = 1.$$

Dunque, i limiti sinistro e destro per $x \to 0$ di $\operatorname{sign} x$ non coincidono. In base al precedente teorema si può concludere che $\operatorname{sign} x$ non ammette limite per $x \to 0$. Un analogo ragionamento si può fare per provare che la funzione di Heaviside $H(x)$ non ammette limite per $x \to 0$.

Esempio. Sia $f(x) = 1/x$. Si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Perciò $\lim_{x\to 0} 1/x$ non esiste.

Esercizio. Provare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha $\lim_{x\to n^-}[x] = n-1$ e $\lim_{x\to n^+}[x] = n$.

Esercizio. Provare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha $\lim_{x\to n^-}(x - [x]) = 1$ e $\lim_{x\to n^+}(x - [x]) = 0$.

L'introduzione dei simboli x_0^+ , x_0^- , $+\infty$, $-\infty$ ci permette di unificare in una sola definizione tutte le definizioni di limite date fino ad ora. A questo scopo, estendiamo innanzitutto la definizione di intorno (precedentemente introdotta per un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e per i simboli x_0^+ e x_0^-) ai due reali estesi $-\infty$ e $+\infty$:

- dato $a \in \mathbb{R}$, la semiretta sinistra $(-\infty, a)$ si dice *intorno (in* $\mathbb{R}$*) di* $-\infty$ di estremo a;
- dato $a \in \mathbb{R}$, la semiretta destra $(a, +\infty)$ si dice *intorno (in* $\mathbb{R}$*) di* $+\infty$ di estremo a;

Notazione. Nelle definizioni e nei teoremi che seguono indicheremo con α un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure uno dei simboli x_0^+ , x_0^- , $+\infty$, $-\infty$.

Una volta definiti gli intorni di α si può estendere il concetto di punto di accumulazione nel seguente modo: *dato un insieme* $X \subseteq \mathbb{R}$*, un elemento* α *si dice di accumulazione per* X *se ogni intorno (in* $\mathbb{R}$*) di* α *contiene almeno un punto di* X *distinto da* α *stesso.*

A questo punto, siamo in grado di formulare una definizione unitaria di limite tramite la nozione di intorno.

Definizione generale di limite (tramite gli intorni). Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e sia α un punto di accumulazione per il dominio X di f. Si dice che $f(x)$ *tende a* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *per* x *che tende ad* α se **per ogni** intorno V di λ **esiste** un intorno U di α tale che per ogni $x \in U \cap X$ e $x \neq \alpha$ si ha $f(x) \in V$. Si usa anche dire che il *limite* per x che tende ad α di $f(x)$ è uguale a λ e si scrive

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lambda\,.$$

Osservazione. Se una funzione f tende a $l \in \mathbb{R}$ per $x \to \alpha$ si dice che ha *limite finito.* Per affermare che f tende a zero per $x \to \alpha$, si usa dire che è *infinitesima* (per $x \to \alpha$) o che è un *infinitesimo* (spesso si omette di aggiungere "per $x \to \alpha$", quando risulta evidente dal contesto). Per affermare invece che una funzione f tende a $+\infty$ o a $-\infty$ per $x \to \alpha$, si usa dire che è *infinita* (per $x \to \alpha$) o che è un *infinito.*

Osservazione. Dalla definizione di limite segue immediatamente che $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ per $x \to \alpha$ se e solo se $f(x) - l \to 0$ per $x \to \alpha$, cioè se e solo se la funzione $f - l$ è infinitesima per $x \to \alpha$.

N.B. Nei teoremi e nelle osservazioni che seguono, quando parleremo del limite per $x \to \alpha$ sarà sempre sottinteso che α sia un punto di accumulazione per il dominio X di f.

Teorema (Unicità del limite). *Supponiamo che il limite per x che tende ad α di $f(x)$ esista (finito o infinito). Allora tale limite è unico.*

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso $\alpha = x_0 \in \mathbb{R}$ e limite finito. Per assurdo, supponiamo che, per $x \to x_0$, $f(x) \to l_1$ e $f(x) \to l_2$ con $l_1 \neq l_2$. Fissiamo $\epsilon \leq |l_1 - l_2|/2$. Per definizione di limite, esiste $\delta_1 > 0$ tale che se $0 < |x - x_0| < \delta_1$ e $x \in X$ si ha $|f(x) - l_1| < \epsilon$. Analogamente, esiste $\delta_2 > 0$ tale che se $0 < |x - x_0| < \delta_2$ e $x \in X$ si ha $|f(x) - l_2| < \epsilon$. Prendendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $x \in X$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha, dalla disuguaglianza triangolare del valore assoluto,

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < 2\epsilon\,,$$

da cui si ricava $\epsilon > |l_1 - l_2|/2$, il che contraddice la scelta di ϵ. □

Teorema (della permanenza del segno). *Supponiamo che il limite per x che tende ad α di $f(x)$ sia maggiore di zero. Allora esiste un intorno forato di α nel quale si ha $f(x) > 0$.*

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso $\alpha = x_0 \in \mathbb{R}$ e limite finito. Sia perciò $l > 0$ il limite di $f(x)$ e sia $\epsilon = l/2$. Per definizione di limite, esiste $\delta > 0$ tale che se $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in X$ si ha $|f(x) - l| < \epsilon$. Ne segue, $f(x) > l - \epsilon = l/2 > 0$ per ogni $x \in X$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$. □

Esercizio. Provare il teorema della permanenza del segno nel caso in cui $f(x) \to +\infty$ per $x \to \alpha$.

Osservazione. In generale non si può affermare che, se una funzione è positiva in un intorno forato di α e ha limite per $x \to \alpha$, allora tale limite sia maggiore di zero. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^2$ è positiva per $x \neq 0$, ma tende a zero per $x \to 0$. Quello che si può affermare è che il limite è necessariamente positivo o nullo (supponendo ovviamente che esista). Infatti, se tale limite fosse minore di zero, per il teorema della permanenza del segno la funzione sarebbe minore di zero in un intorno forato di α mentre stiamo supponendo che sia maggiore di zero.

Teorema (dei carabinieri). *Siano $f, g, h\colon X \to \mathbb{R}$ tre funzioni reali di variabile reale e sia α un punto di accumulazione per X. Supponiamo $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in un intorno forato di α e $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x) = l \in \mathbb{R}$. Allora $\lim_{x\to\alpha} g(x) = l$.*

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso $\alpha = x_0 \in \mathbb{R}$. Dato $\epsilon > 0$, esiste $\delta_1 > 0$ tale che, se $0 < |x - x_0| < \delta_1$ e $x \in X$ si ha $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$. Analogamente esiste $\delta_2 > 0$ tale che, se $0 < |x - x_0| < \delta_2$ e $x \in X$ si ha $l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$. Per ipotesi esiste inoltre $\delta_0 > 0$ tale che se $0 < |x - x_0| < \delta_0$

e $x \in X$ si ha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Sia $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$. Per $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in X$ si ha perciò

$$l - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \epsilon$$

da cui risulta $|g(x) - l| < \epsilon$. $\square$

Il teorema dei carabinieri, con ovvie modifiche, continua a valere anche nel caso in cui il limite non sia finito. Si può provare infatti il seguente:

Teorema (del carabiniere). *Siano $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ due funzioni reali di variabile reale e sia α un punto di accumulazione per X. Supponiamo $f(x) \leq g(x)$ in un intorno forato di α e $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ (oppure $\lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$). Allora $\lim_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$ (oppure $\lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$).*

Esempio. La funzione $g(x) = x + \operatorname{sen} x \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Si può infatti minorare col "carabiniere" $f(x) = x - 1$, che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ (il teorema delle operazioni sui limiti non è applicabile in questo caso: infatti, come vedremo, $\operatorname{sen} x$ non ha limite per $x \to +\infty$).

Osservazione. *Una funzione reale di variabile reale $f : X \to \mathbb{R}$ tende a zero per $x \to \alpha$ se e solo se tende a zero il suo valore assoluto.* (Provarlo per esercizio).

Osservazione. Proviamo la seguente importante disuguaglianza:

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Infatti, ricordando la definizione di seno nel cerchio goniometrico, è noto che si ha

$$0 < \operatorname{sen} x < x\,, \qquad \text{se } 0 < x < \pi/2\,.$$

Essendo poi $|\operatorname{sen} x|$ e $|x|$ funzioni pari, risulta $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ se $|x| \leq \pi/2$. Infine, se $|x| > \pi/2$, si ha $|\operatorname{sen} x| \leq 1 \leq \pi/2 < |x|$.

Esempio. Proviamo che

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

Per la disuguaglianza precedente si ha

$$0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq |x|\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Poiché $|x| \to 0$ per $x \to 0$, dal teorema dei carabinieri segue immediatamente che $|\operatorname{sen} x| \to 0$ e quindi, per l'osservazione sopra, si ha $\operatorname{sen} x \to 0$ per $x \to 0$.

Esempio. Proviamo che
$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$
Si ha infatti,
$$\cos x = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2(x/2)\,,$$
da cui,
$$0 \leq 1 - \cos x = 2\,\mathrm{sen}^2(x/2) \leq x^2/2\,.$$
Per il teorema dei carabinieri, dalla disuguaglianza sopra si deduce che $1-\cos x \to 0$ per $x \to 0$, da cui, come osservato già precedentemente, $\cos x \to 1$.

Esempio. Proviamo che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} = 1.$$
Dimostriamo preliminarmente che vale la disuguaglianza:
$$\cos x < \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} < 1 \qquad \text{se } 0 < |x| < \pi/2\,.$$
Infatti, ricordando la definizione di seno e tangente nel cerchio goniometrico, è noto che si ha
$$0 < \mathrm{sen}\, x < x < \mathrm{tang}\, x\,, \qquad \text{se } 0 < x < \pi/2\,.$$
Dividendo per $\mathrm{sen}\, x$ si ottiene
$$1 < \frac{x}{\mathrm{sen}\, x} < \frac{1}{\cos x} \qquad \text{se } 0 < x < \pi/2$$
o, equivalentemente,
$$\cos x < \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} < 1 \qquad \text{se } 0 < x < \pi/2\,.$$
D'altra parte, essendo $\cos x$, $\mathrm{sen}\, x/x$ e la funzione costantemente uguale a 1 funzioni pari, la disuguaglianza vale anche se $-\pi/2 < x < 0$.

Torniamo alla dimostrazione del limite. Dalla disuguaglianza appena provata, si ha
$$\cos x \leq \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} \leq 1\,, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}\,.$$
Dall'esempio precedente, $\cos x \to 1$ per $x \to 0$. Di conseguenza, applicando il teorema dei carabinieri, si deduce che anche $\mathrm{sen}\, x/x \to 1$ per $x \to 0$.

5^a **settimana - dal 14.10.19**

Enunciamo ora un teorema che facilita il calcolo dei limiti evitando di ricorrere ogni volta alla definizione di limite (ovviamente per dimostrare tale teorema la definizione non si può evitare). Consideriamo prima il caso in cui i limiti siano valori finiti, cioè appartenenti ai reali. Tratteremo successivamente il caso generale di limiti nei reali estesi.

Teorema. (Operazioni sui limiti finiti). *Siano $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ due funzioni reali di variabile reale e sia α un punto di accumulazione per X. Se $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ e $g(x) \to m \in \mathbb{R}$ per $x \to \alpha$, allora (per $x \to \alpha$) si ha:*
1) $f(x) + g(x) \to l + m$;
2) $f(x)g(x) \to lm$;
3) $f(x)/g(x) \to l/m$, nell'ipotesi $m \neq 0$.

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione di 1) nel caso $\alpha = x_0 \in \mathbb{R}$. Fissato $\epsilon > 0$, esiste $\delta_1 > 0$ tale che se $x \in B_{\delta_1}(x_0) \cap X$ e $x \neq x_0$ si ha $|f(x) - l| < \epsilon/2$. Analogamente, esiste $\delta_2 > 0$ tale che se $x \in B_{\delta_2}(x_0) \cap X$ e $x \neq x_0$ si ha $|g(x) - m| < \epsilon/2$. Prendendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $x \in B_{\delta}(x_0) \cap X$, $x \neq x_0$ si ha, per la disuguaglianza triangolare del valore assoluto,

$$|f(x) + g(x) - (l + m)| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

La dimostrazione dei punti 2) e 3) viene omessa. □

Osservazione. Nel caso 3) del teorema precedente, l'ipotesi $m \neq 0$ garantisce, per il teorema della permanenza del segno, l'esistenza di un intorno forato di α nel quale $g(x) \neq 0$. In tale intorno, risulta perciò ben definito il quoziente $f(x)/g(x)$.

Un utile corollario del teorema dei carabinieri è il seguente

Corollario. *Siano $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ due funzioni reali di variabile reale e sia α un punto di accumulazione per X. Supponiamo che $f(x) \to 0$ per $x \to \alpha$ e che g sia limitata. Allora $f(x)g(x) \to 0$ per $x \to \alpha$.*

Dimostrazione. (1^a dimostrazione.) Poiché g è limitata, esiste una costante $M > 0$ tale che $|g(x)| \leq M$ per ogni $x \in X$. Pertanto (per ogni $x \in X$) risulta

$$0 \leq |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M|f(x)|\,.$$

La funzione $|f(x)g(x)|$ è dunque "incastrata" tra due carabinieri che tendono a zero: il primo costituito dalla funzione costante uguale a zero, il secondo rappresentato dalla funzione $M|f(x)|$ (che tende a zero in base all'osservazione precedente). Possiamo dunque concludere che $|f(x)g(x)| \to 0$ e quindi (ancora per l'osservazione precedente) anche $f(x)g(x) \to 0$. □

Si può dare un'altra dimostrazione del corollario usando direttamente la definizione di limite.

Dimostrazione. (2^a dimostrazione facoltativa.) Essendo g limitata, esiste $M > 0$ tale che $|g(x)| \leq M$ per ogni $x \in X$. Sia $\epsilon > 0$ fissato. Poiché $f(x) \to 0$ per $x \to \alpha$, in corrispondenza di ϵ/M esiste un intorno forato U di α tale che se $x \in U \cap X$ si ha $|f(x)| < \epsilon/M$. Perciò, se $x \in U \cap X$ si ha

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)|\,|g(x)| \leq \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon\,.$$

Possiamo dunque concludere che $|f(x)g(x)| \to 0$ e quindi (ancora per l'osservazione precedente) anche $f(x)g(x) \to 0$. $\square$

Il precedente corollario può essere enunciato anche così: *"Il prodotto di una funzione limitata per una infinitesima è una funzione infinitesima".*

Esempio. La funzione $x \mapsto x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ è infinitesima per $x \to 0$. Infatti $x^2 \to 0$ per $x \to 0$ e $x \mapsto \operatorname{sen}(1/x)$ è una funzione limitata (si osservi che il teorema riguardante le operazioni sui limiti non è applicabile in questo caso, visto che, come proveremo in seguito, $x \mapsto \operatorname{sen}(1/x)$ non ammette limite per $x \to 0$).

Esempio. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{x} = 0\,.$$

Infatti, la funzione $f(x) = 1/x$ è infinitesima per $x \to +\infty$, mentre

$$|\operatorname{sen} x + \cos x| \leq |\operatorname{sen} x| + |\cos x| \leq 2\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(Anche in questo caso il teorema riguardante le operazioni sui limiti non è applicabile in quanto, come proveremo in seguito, $x \mapsto \operatorname{sen} x + \cos x$ non ammette limite per $x \to +\infty$).

Teorema (di esistenza del limite per le funzioni monotone). *Sia $f\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona definita in un intervallo (α,β), dove α e β sono reali estesi. Allora, esistono (nei reali estesi) i limiti per $x \to \alpha$ e per $x \to \beta$ di $f(x)$, e risulta*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \inf_{x\in(\alpha,\beta)} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to\beta} f(x) = \sup_{x\in(\alpha,\beta)} f(x)$$

se f è crescente e

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \sup_{x\in(\alpha,\beta)} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to\beta} f(x) = \inf_{x\in(\alpha,\beta)} f(x)$$

se f è decrescente.

Dimostrazione. (Facoltativa) Proviamo il risultato nel caso speciale di f crescente, $x \to \beta \in \mathbb{R}$ e $\sup_{(\alpha,\beta)} f < +\infty$. Gli altri casi si provano in modo analogo. Denotiamo, per brevità, $\sup_{(\alpha,\beta)} f = l$. Fissiamo un arbitrario $\epsilon > 0$. Occorre trovare un intorno (sinistro) di β in cui valga $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$. Poiché (per definizione di estremo superiore) l è il minimo maggiorante per $f(x)$, il numero $l - \epsilon$ non può essere un maggiorante per $f(x)$. Non è vero quindi che tutti i numeri $f(x)$ verificano la condizione $f(x) \leq l - \epsilon$. Ne esiste quindi (almeno) uno, denotiamolo $f(x_\epsilon)$, che non verifica tale condizione. Esiste cioè un x_ϵ per il quale risulta $f(x_\epsilon) > l - \epsilon$ (è la seconda proprietà della caratterizzazione dell'estremo superiore di una funzione). Dato che abbiamo supposto $f(x)$ crescente, se x è un qualunque numero maggiore di x_ϵ, si ha $f(x_\epsilon) \leq f(x)$ e quindi, a maggior ragione, $l - \epsilon < f(x)$. D'altra parte l è un maggiorante per $f(x)$ (è la prima proprietà della caratterizzazione dell'estremo superiore di una funzione) e, di conseguenza, per ogni x (e non solo per quelli maggiori di x_ϵ) risulta $f(x) \leq l$. In conclusione, possiamo affermare che per gli $x > x_\epsilon$ si ha $l - \epsilon < f(x) \leq l < l + \epsilon$, e quindi, per la definizione di limite, $f(x) \to l = \sup_{(\alpha,\beta)} f$ per $x \to \beta$.
$\square$

Esempio. Come applicazione del teorema di esistenza del limite per le funzioni monotone, mostriamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctang} x = \pi/2.$$

Allo scopo ricordiamo che la funzione arcotangente è l'inversa della restrizione della tangente all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Essendo la tangente, in tale intervallo, una funzione strettamente crescente, anche l'arcotangente risulta strettamente crescente. Di conseguenza, ricordandosi che l'immagine di una funzione inversa coincide col dominio della funzione che viene invertita, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctang} x = \sup_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctang} x = \sup\,(-\pi/2, \pi/2) = \pi/2.$$

Con analoghi ragionamenti si può applicare il teorema precedente per provare l'esistenza di limiti di potenze, esponenziali, logaritmi.

Allo scopo di estendere ai reali estesi il teorema sulle operazioni sui limiti, definiamo in $\mathbb{R}^*$ le seguenti operazioni (dove l è un arbitrario numero reale):
$-\infty + l = -\infty$, $+\infty + l = +\infty$;
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
$l(\pm\infty) = \pm\infty$, se $l > 0$ e $l(\pm\infty) = \mp\infty$ se $l < 0$;
$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$;
$l/\pm\infty = 0$.

Al fine di semplificare il calcolo dei limiti è utile introdurre nell'algebra dei reali estesi anche le seguenti convenzioni:

$$\frac{1}{0^+} = +\infty\,, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty\,,$$

dove i simboli 0^+ e 0^-, pur rappresentando entrambi il numero reale 0, indicano che 0 va considerato come estremo sinistro di un intorno della forma $(0, \epsilon)$ nel caso che si scriva 0^+ o come estremo destro di un intorno della forma $(-\epsilon, 0)$ nel caso che si scriva 0^-. Ad esempio, in certi casi, può essere utile scrivere che $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0^+$ intendendo con ciò che " per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intorno forato U di α tale che se $x \in U \cap X$ si ha $f(x) \in (0, \epsilon)$."

Numerosi altri casi si ottengono facilmente dai due precedenti. Ecco alcuni esempi:

$$\frac{-2}{0^+} = (-2)\cdot\frac{1}{0^+} = (-2)\cdot(+\infty) = -\infty\,,$$
$$\frac{-\infty}{0^-} = (-\infty)\cdot\frac{1}{0^-} = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty\,.$$

Ogni eventuale definizione delle espressioni $(+\infty) + (-\infty)$, $0/0$, $0\cdot\infty$ e ∞/∞ (dove, per brevità con ∞ si intende o $+\infty$ o $-\infty$) porterebbe, come vedremo, a delle incoerenze e quindi non conviene introdurla.

Possiamo ora enunciare il teorema sulle operazioni sui limiti nel caso generale.

Teorema (Operazioni sui limiti "estesi"). *Siano f e g due funzioni reali di variabile reale. Supponiamo che per $x \to \alpha$ risulti $f(x) \to \lambda \in \mathbb{R}^*$ e $g(x) \to \mu \in \mathbb{R}^*$. Allora, quando (nei reali estesi) ha senso, per $x \to \alpha$ si ha:*
1) $f(x) + g(x) \to \lambda + \mu$;
2) $f(x)g(x) \to \lambda\mu$;
3) $f(x)/g(x) \to \lambda/\mu$.

Esempio. Calcoliamo il

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tang} x.$$

Come vedremo meglio in seguito, per $x \to \pi/2$ risulta

$$\operatorname{sen} x \to \operatorname{sen}(\pi/2) = 1 \quad \text{e} \quad \cos x \to \cos(\pi/2) = 0.$$

D'altra parte la funzione $\cos x$ è positiva nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, e quindi, tenendo conto che x tende a $\pi/2$ da sinistra, $\cos x$ tende addirittura a 0^+. Dunque, per $x \to (\pi/2)^-$, si ottiene

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \to \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Esercizio. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tang} x\,, \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tang} x\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\,.$$

Osservazione. Come già osservato, nell'algebra dei reali estesi, non è conveniente dare un senso alle espressioni $\infty-\infty$, $0/0$, $0\cdot\infty$ e ∞/∞, dette anche *forme indeterminate* (per brevità il simbolo ∞ rappresenta $+\infty$ o $-\infty$). Il significato di forma indeterminata è il seguente: quando il limite di due funzioni combinate si presenta in uno dei quattro casi precedenti, senza ulteriori informazioni sulle funzioni non è possibile concludere niente.

Riportiamo alcuni esempi di coppie di forme (apparentemente) indeterminate dal comportamento contrastante:

$$\begin{array}{lll} (\infty-\infty) & x-x\to 0 & \text{per } x\to+\infty; \\ (\infty-\infty) & x^2-x\to+\infty & \text{per } x\to+\infty; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (0\cdot\infty) & x(1/x)\to 1 & \text{per } x\to 0; \\ (0\cdot\infty) & x^2(1/x)\to 0 & \text{per } x\to 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (0/0) & x/x\to 1 & \text{per } x\to 0; \\ (0/0) & x^2/x\to 0 & \text{per } x\to 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (\infty/\infty) & x/x\to 1 & \text{per } x\to+\infty; \\ (\infty/\infty) & x^2/x\to+\infty & \text{per } x\to+\infty. \end{array}$$

Esempio. Proviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5+x^4-3x^2}{3x^5+x^3+1} = \frac{2}{3}\,.$$

Si ha

$$\frac{2x^5+x^4-3x^2}{3x^5+x^3+1} = \frac{x^5(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3})}{x^5(3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5})} = \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}{3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}}\,,$$

dove l'ultimo membro tende a $2/3$ per il teorema sulle operazioni con i limiti finiti.

Esercizio. Provare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5+x^4-3x^2}{x^3+1} = +\infty \quad \text{e che} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-3x^2}{3x^5+x^3+1} = 0.$$

Esempio. Proviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Si ha
$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x}.$$
Ricordando che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,,$$
il primo dei due fattori tende a 1. D'altra parte, per il teorema sulla somma e il quoziente di limiti, il secondo fattore tende a 1/2 e quindi, per il teorema sul prodotto dei limiti, si conclude.

Esercizio. Provare che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tang} x}{x} = 1.$$

Teorema (di cambiamento di variabile nei limiti). *Siano $x \mapsto f(x)$ e $t \mapsto g(t)$ due funzioni reali di variabile reale ottenute una dall'altra mediante i cambiamenti di variabile $x = \varphi(t)$ e $t = \varphi^{-1}(x)$, dove φ è una funzione iniettiva. Se t (cioè $\varphi^{-1}(x)$) tende a β per $x \to \alpha$ e x (cioè $\varphi(t)$) tende ad α per $t \to \beta$ (α, $\beta \in \mathbb{R}^*$), allora*
$$\lim_{x\to\alpha} f(x) \;=\; \lim_{t\to\beta} g(t)\,,$$
ossia, se uno dei due limiti esiste, anche l'altro esiste, e i limiti coincidono.

Esempio (di calcolo di un limite mediante un cambiamento di variabile). Consideriamo il seguente limite:
$$\lim_{x\to-\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,,$$
che può essere scritto nella forma
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x}\,.$$
Ponendo $t = 1/x$, risulta che $t \to 0^-$ se e solo se $x \to -\infty$. Quindi, per il precedente teorema, si ottiene
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = \lim_{t\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1\,.$$

Esempio. Proviamo che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x} = 2/3\,.$$
Si ha
$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\;\frac{2x}{3x}\;\frac{3x}{\operatorname{sen} 3x}\,.$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\,.$$

Ponendo $t = 2x$, risulta che $t \to 0$ se e solo se $x \to 0$. Quindi, per il precedente teorema, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1\,.$$

In maniera analoga, effettuando il cambiamento di variabile $t = 3x$, si prova che

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} = 1\,.$$

Di conseguenza, per il teorema sul prodotto dei limiti, si conclude.

Esempio. Proviamo che

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctang} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctang} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Ponendo $t = 1/x$, risulta che $t \to -\infty$ se e solo se $x \to 0^-$ e che $t \to +\infty$ se e solo se $x \to 0^+$. Quindi, per il precedente teorema, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctang} \frac{1}{x} = \lim_{t\to -\infty} \operatorname{arctang} t = -\frac{\pi}{2}\,.$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctang} \frac{1}{x} = \lim_{t\to +\infty} \operatorname{arctang} t = \frac{\pi}{2}\,.$$

Funzioni continue

Definizione. Una funzione reale di variabile reale $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *continua in un punto* $x_0 \in X$ se x_0 è un punto isolato di X oppure, nel caso che x_0 sia un **punto di accumulazione** di X, se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Osservazione. La parte significativa della definizione è quella in cui x_0 è un punto di accumulazione. Quasi sempre i punti del dominio delle funzioni (reali di variabile reale) che prenderemo in considerazione saranno anche di accumulazione per il dominio stesso. Ciò è vero, ad esempio, se una funzione è definita in un intervallo non banale (o, più in generale, in un insieme costituito dall'unione, finita o infinita, di intervalli non banali). D'altra parte, non sempre questa condizione è verificata. Ad esempio la funzione $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$ non soddisfa tale ipotesi in quanto il suo dominio è costituito soltanto da punti isolati (i punti in cui $\cos x = 1$). In base alla definizione data, tale funzione è continua in tutti i punti del suo dominio.

Si fa notare che il concetto di limite per $x \to x_0$ di una funzione è definito soltanto quando x_0 è un punto di accumulazione per il dominio della funzione ma non occorre che appartenga al dominio, mentre per la continuità **il punto deve stare nel dominio** ma non occorre che sia di accumulazione.

Ricordando la definizione di limite (finito-finito) si ottiene che:

"Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $x_0 \in X$ e di accumulazione se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tale che da $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$ segue $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$."

Se f è continua in ogni punto di X diremo che f è *continua in* X o, nel caso in cui X sia il dominio naturale di f, più semplicemente che f è *continua*.

Osservazione. Osserviamo che se una funzione è continua in un insieme X, allora è continua anche la sua restrizione ad un qualunque sottoinsieme di X.

Esercizio. Provare che la funzione $f(x) = x$ è continua.

Esercizio. Provare che la funzione $f(x) = |x|$ è continua.

Basta ricordare che risulta

$$\Big||x| - |x_0|\Big| \leq |x - x_0|$$

Esercizio. Provare che le funzioni $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$ sono continue.

Si ha:

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = |2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}| \leq 2 \frac{|x - x_0|}{2}\,.$$

Perciò, dato $\epsilon > 0$ si ottiene $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| < \epsilon$ pur di prendere $|x - x_0| < \delta_\epsilon = \epsilon$. Questo prova che $\operatorname{sen} x$ è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$. Poichè x_0 è arbitrario, se ne deduce che $\operatorname{sen} x$ è continua in $\mathbb{R}$. La continuità di $\cos x$ si prova in maniera analoga partendo dalla relazione

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \operatorname{sen} \frac{x + x_0}{2}\,.$$

Esempio. Un importante esempio di funzione continua è la funzione esponenziale $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$. Per brevità, invece di dare una dimostrazione diretta di questo fatto, dedurremo in seguito la continuità dell'esponenziale da teoremi più generali.

Dall'analogo teorema per i limiti si deduce il seguente

Teorema (Permanenza del segno). *Sia* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *continua in* $x_0 \in X$ *e sia* $f(x_0) > 0$. *Allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$.

Dal teorema riguardante le operazioni sui limiti finiti segue immediatamente il seguente

Teorema (continuità delle funzioni combinate). *Una funzione ottenuta tramite somma, prodotto, quoziente, composizione di funzioni continue è una funzione continua.*

Osservazione. Si osservi che in virtù del teorema precedente si può affermare che i polinomi sono funzioni continue. Anche le funzioni razionali, essendo rapporto di polinomi, sono continue (compresa, ad esempio, la funzione $f(x) = 1/x$). Lo stesso vale per la funzione $f(x) = \operatorname{tang} x = \operatorname{sen} x / \cos x$.

Esercizio. Provare che, se f è una funzione continua, allora anche $|f|$ è una funzione continua.

Sugg. Dalle proprietà del valore assoluto si ha

$$\Big| |f(x)| - |f(x_0)| \Big| \leq |f(x) - f(x_0)|.$$

Altrimenti, è sufficiente osservare che $|f|$ è composizione di f e di $|\cdot|$ che sono entrambe continue, ecc. $\square$

Se f non è continua in un punto x_0 del suo dominio X, si dice che f è *discontinua* in x_0 oppure che f ha una *discontinuità in* x_0.

Osservazione. È importante inoltre notare che, in base alla definizione di continuità, non ha senso affermare che una funzione è discontinua (o continua) in un punto in cui non è definita. Ad esempio, la funzione $f(x) = 1/x$ è continua nel suo dominio (che è $\mathbb{R}\backslash\{0\}$). Tuttavia in alcuni testi di analisi matematica si asserisce che tale funzione non è continua in 0 (ma 0 non appartiene al suo dominio!).

Più precisamente, diremo che f ha in x_0 una *discontinuità di prima specie* se esistono finiti i limiti destro e sinistro di f in x_0 ma risulta

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)\,.$$

Ad esempio, la funzione $f(x) = [x]$ (parte intera) ha una discontinuità di prima specie in ogni $x \in \mathbb{Z}$ e così pure la funzione $f(x) = x - [x]$ (mantissa).

Se, invece, uno almeno dei due limiti

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

è infinito o non esiste, diremo che f ha in x_0 una *discontinuità di seconda specie.* Ad esempio la funzione di Dirichlet ha in ogni punto di $\mathbb{R}$ una discontinuità di seconda specie.

Infine, se in x_0 esiste finito il limite di $f(x)$ ma risulta

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

diremo che f ha in x_0 una *discontinuità eliminabile.* Ad esempio, la funzione $f(x) = [\cos x]$ ha in $x_0 = 0$ una discontinuità eliminabile.

Se f è una funzione continua in $X \setminus \{x_0\}$ e se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \setminus \{x_0\}, \\ l & x = x_0\,, \end{cases}$$

è detta *prolungamento continuo* oppure *prolungamento per continuità* di f in x_0.

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

che è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, è prolungabile con continuità in $x_0 = 0$ a $\tilde{f}$ ponendo $\tilde{f}(0) = 1$. Invece, le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{|x|}{x}\,,$$

che sono definite e continue per $x \neq 0$, non ammettono prolungamenti continui in $x_0 = 0$ in quanto $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste.

Enunciamo ora alcuni importanti teoremi sulle **funzioni continue in un intervallo**.

Teorema (degli zeri). *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo I e siano $a, b \in I$, $a < b$, tali che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Osservazione(sulle ipotesi del teorema). Se f non è definita in un intervallo la conclusione del teorema degli zeri può non valere. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{se } x \in [3, 4] \end{cases}$$

è continua e cambia segno in $A = [1, 2] \cup [3, 4]$ ma, ovviamente, non si annulla mai.

Osservazione. Illustriamo un semplice algoritmo numerico, detto *metodo delle bisezioni*, per trovare una soluzione di un'equazione del tipo $f(x) = 0$, dove $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ verifica le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri. Si può supporre $f(a) \leq 0$. In caso contrario basta cambiare f in $-f$ (le equazioni $f(x) = 0$ e $-f(x) = 0$ sono infatti equivalenti). Poniamo, per comodità, $a_0 = a$ e $b_0 = b$, e consideriamo il punto di mezzo $c_0 = (b_0 + a_0)/2$ dell'intervallo $[a_0, b_0]$. Se $f(c_0) > 0$ poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$, altrimenti poniamo $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$. In altre parole, una volta diviso $[a_0, b_0]$ in due intervalli uguali, denotiamo con $[a_1, b_1]$ quello di sinistra o quello di destra a seconda che $f(c_0)$ sia maggiore di zero o non lo sia. In ogni caso si ha $f(a_1) \leq 0$ e $f(b_1) > 0$. Pertanto, per il teorema di esistenza degli zeri, nell'intervallo chiuso $[a_1, b_1]$ c'è almeno una soluzione della nostra equazione. Ripetiamo il procedimento considerando il punto di mezzo $c_1 = (b_1 + a_1)/2$ del nuovo intervallo e calcolando $f(c_1)$. Se $f(c_1) > 0$ poniamo $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$, altrimenti poniamo $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. Procedendo ricorsivamente si considera il punto $c_{n-1} = (b_{n-1} + a_{n-1})/2$ e si calcola $f(c_{n-1})$. Se $f(c_{n-1}) > 0$ si pone $a_n = a_{n-1}$ e $b_n = c_{n-1}$, altrimenti si pone $a_n = c_{n-1}$ e $b_n = b_{n-1}$. Ad ogni passo si ottiene un intervallo $[a_n, b_n]$ di ampiezza la metà del precedente che contiene almeno una soluzione. Quindi a_n è un'approssimazione per difetto di tale soluzione e b_n un'approssimazione per eccesso. L'errore massimo che si commette considerando una delle due approssimazioni è dato dall'ampiezza $b_n - a_n$ dell'ennesimo intervallo (è addirittura la metà di tale ampiezza se si approssima la soluzione col punto di mezzo di tale intervallo). Dunque, per determinare una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ con un errore inferiore ad un assegnato $\epsilon > 0$ non occorre eseguire il test $b_n - a_n < \epsilon$ ad ogni passo: è sufficiente ripetere la procedura di bisezione (senza eseguire il test) un numero n di volte, dove $n \in \mathbb{N}$ verifica la disequazione $(b - a)/2^n < \epsilon$. Risolvendo tale disequazione rispetto all'incognita n si ottiene

$$n \;>\; \log_2 \frac{b-a}{\epsilon} \;=\; \frac{1}{\log 2} \log \frac{b-a}{\epsilon}.$$

Considerando la parte intera di tale numero, si ottiene che il più piccolo n che verifica la precedente condizione è

$$\bar{n} \;=\; 1 + \left[\, \left(\frac{1}{\log 2} \log \frac{b-a}{\epsilon} \right) \right].$$

Ad esempio, se $b - a = 1$, per ottenere una soluzione con un errore inferiore a 10^{-3} è sufficiente ripetere il procedimento di bisezione dieci volte.

Osservazione. Nella dimostrazione del Teorema degli zeri si usa la proprietà di completezza dei numeri reali. Osserviamo che nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali il teorema degli zeri non vale. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^2 - 2$ è tale che $f(0) < 0$ e $f(2) > 0$ ma, come già dimostrato in precedenza, non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2.

Corollario (Esistenza della radice n-esima aritmetica). *Sia $y_0 > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Allora, l'equazione $x^n = y_0$ ammette una e una sola soluzione positiva, cioè esiste uno ed un solo $x_0 > 0$ tale che $x_0^n = y_0$.*

Dimostrazione. Se $y_0 = 1$, si ha $x_0 = 1$. Altrimenti, consideriamo la funzione (ovviamente continua) $f(x) = x^n - y_0$ e osserviamo che si ha $f(0) = -y_0 < 0$. Per poter applicare il Teorema degli zeri è sufficiente allora trovare un punto a destra di 0 in cui la f assuma segno positivo. Se $y_0 < 1$, si ha $f(1) = 1 - y_0 > 0$; se invece $y_0 > 1$, risulta $f(y_0) = y_0^n - y_0 > 0$. In ogni caso perciò esiste un intervallo ai cui estremi f assume segno discorde e, quindi, esiste $x_0 > 0$ tale che $x_0^n = y_0$. Inoltre, essendo la funzione f strettamente crescente, il punto x_0 è unico. $\square$

Il punto $x_0 > 0$ trovato nel corollario precedente è detto *radice n-esima aritmetica* di y_0 e si indica con $\sqrt[n]{y_0}$.

Esempio. Proviamo che l'equazione

$$e^x = -x$$

ha una e una sola soluzione. Consideriamo infatti la funzione $f(x) = e^x + x$ che è continua in $\mathbb{R}$ in quanto somma di funzioni continue. Osserviamo che $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, mentre $f(0) = 1 > 0$. Perciò, per il Teorema degli zeri, esiste $x_0 \in (-1, 0)$ tale che $f(x_0) = 0$. Essendo inoltre f strettamente crescente, tale zero è anche unico. Il metodo delle bisezioni illustrato precedentemente permette di trovare un valore approssimato di x_0.

6^a settimana - dal 21.10.19

Osservazione. Utili applicazioni del Teorema degli zeri per provare l'esistenza di soluzioni di equazioni del tipo $f(x) = 0$ si hanno, ad esempio, nel caso di polinomi di grado dispari oppure in quello di funzioni continue con limiti all'infinito di segno discorde. Sia infatti

$$P(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots a_0, \quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots 2n,$$

un polinomio di grado dispari. Si ha:

$$P(x) = x^{2n+1}(1 + \frac{a_{2n}}{x} + \dots \frac{a_0}{x^{2n+1}}), \quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots 2n,$$

Per il teorema della permanenza del segno, esiste $K > 0$ tale che se $|x| \geq K$ il termine tra parentesi tonda è maggiore di zero. Perciò $P(x) < 0$ se $x \leq -K$ e $P(x) > 0$ se $x \geq K$. Di conseguenza, per il teorema degli zeri, $P(x)$ ha almeno una radice reale nell'intervallo $(-K, K)$.

Conseguenza del Teorema degli zeri è il seguente

Teorema (dei valori intermedi). *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora l'immagine di f è un intervallo. In particolare, f assume tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$, cioè per ogni $y \in (\inf_I f, sup_I f)$ esiste $x \in I$ tale che $f(x) = y$.*

Dimostrazione. Sia $y \in (\inf_I f, sup_I f)$. Per la caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore, esistono a e b in I tali che $f(a) < y < f(b)$. Senza perdere in generalità si può supporre $a < b$. Applicando il Teorema degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - y$ nell'intervallo $[a, b]$ si ottiene la tesi. □

Osservazione (sulle ipotesi del Teorema dei valori intermedi). La funzione $f(x) = 1/x$ è continua nell'insieme $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ in cui è definita, ma la sua immagine non è un intervallo (infatti assume valori sia negativi, sia positivi, ma non si annulla). La funzione $f(x) = [x]$ è definita in $\mathbb{R}$ (che è un intervallo) ma la sua immagine non è un intervallo.

Un'altra importante conseguenza del Teorema degli zeri riguarda i legami tra stretta monotonia e invertibilità di una funzione. Abbiamo già osservato in precedenza che non è vero in generale che una funzione iniettiva sia strettamente monotona. Si puo però provare il seguente risultato:

"data f definita in un **intervallo** e ivi **continua**, allora f è iniettiva se e solo se f è strettamente monotona."

Data una funzione continua e invertibile, ci si può chiedere se l'inversa è anch'essa continua. Si potrebbe far vedere con un esempio che in generale non è vero. Se si aggiunge però l'ipotesi che la funzione sia definita in un intervallo, allora l'inversa è continua. Più precisamente si ha:

Teorema (di continuità della funzione inversa). *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora la funzione inversa $f^{-1}\colon f(I) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.*

Osservazione. Nel teorema precedente, poiché abbiamo supposto f continua nell'intervallo I, possiamo dedurre dal Teorema dei valori intermedi che $f(I)$ è un intervallo.

Esempio. Come abbiamo già visto quando abbiamo introdotto le funzioni invertibili, l'inversa della restrizione di $f(x) = x^2 + 1$ a $I = [0, +\infty)$ è la funzione $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$ che ha come dominio l'intervallo $f(I) = [1, +\infty)$. Il teorema precedente ci assicura che tale inversa risulta ivi continua (ovviamente in questo caso semplice la continuità di $y \mapsto \sqrt{y-1}$ può essere verificata direttamente con la definizione). Analoga conclusione vale per l'inversa della restrizione di $f(x) = x^2 + 1$ a $(-\infty, 0]$, cioè per la funzione $f^{-1}(y) = -\sqrt{y-1}$.

Esercizio. Sia $f(x) = -x^2$. Stabilire dove è invertibile e determinare la funzione inversa specificandone dominio e immagine.

Esercizio. Provare che $f(x) = -5x^2 - 10x + 1$ e' invertibile in $I = (-\infty, -1]$ con inversa continua. In tale intervallo determinare l'inversa di f specificandone il dominio. (Sugg. Considerare l'equazione $-5x^2 - 10x + 1 = y$; risolvendo, l'inversa richiesta ha come dominio l'intervallo $(-\infty, 6]$ ed è data da $f^{-1}(y) = -1 - (1/5)\sqrt{5(6-y)}$).

Le funzioni

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \quad \operatorname{tangh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

sono dette *seno iperbolico, coseno iperbolico e tangente iperbolica* rispettivamente e sono chiamate funzioni iperboliche. Esse sono ovviamente continue nel loro dominio $\mathbb{R}$ in quanto somma e quoziente di funzioni continue. Il seno iperbolico e la tangente iperbolica sono dispari e sono strettamente crescenti. Le loro inverse sono dette rispettivamente *settor seno iperbolico e settor tangente iperbolica.* Il coseno iperbolico è pari. L'inversa della restrizione del coseno iperbolico all'intervallo $[0, +\infty)$ è detta *settor coseno iperbolico.* Si può provare che si ha:

$$\operatorname{settsenh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})\,,$$

$$\operatorname{settcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$$

È facile verificare che $(\cosh t)^2 - (\operatorname{senh} t)^2 = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. In altre parole, per ogni t in $\mathbb{R}$, il punto $(x, y) = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$ di $\mathbb{R}^2$ appartiene all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ (per questo le due funzioni $\operatorname{senh} t$ e $\cosh t$ si chiamano iperboliche, mentre le funzioni trigonometriche $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ si chiamano anche circolari perchè il punto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ appartiene alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$). Si potrebbe provare che l'area del settore iperbolico POV dove $P = (x, y)$ appartiene all'iperbole equilatera con asintoti le bisettrici, $O = (0, 0)$, $V = (1, 0)$ è $t/2$ (in maniera analoga, l'area del settore circolare POV dove $P = (x, y)$ appartiene alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1, $O = (0, 0)$, $V = (1, 0)$ è $t/2$).

Riassumendo, dalle definizioni e dai teoremi precedenti si può provare il seguente:

Teorema. *Le funzioni esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, trigonometriche inverse, iperboliche e iperboliche inverse sono continue.*

Il teorema che segue fornisce una condizione sufficiente affinché una funzione continua ammetta massimo e minimo assoluti.

Teorema (di Weierstrass). *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f ammette massimo e minimo assoluti in $[a, b]$, cioè esistono x_m e x_M in $[a, b]$ tali che $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$, $\forall x \in [a, b]$.*

Osservazione (sulle ipotesi del teorema). La funzione $f(x) = 1/x$ è continua nell'intervallo *chiuso* $[1, +\infty)$ ma non ha minimo (si ha $\inf_{x\ge 1} 1/x = 0$). La stessa funzione è continua nell'intervallo *limitato* $(0, 1]$ ma non ha massimo (si ha $\sup_{0<x\le 1} 1/x = +\infty$). La funzione $f(x) = x+1$ è continua nell'intervallo *limitato* $(0, 1)$ ma non ha in $(0, 1)$ né massimo, né minimo. La funzione $f(x) = x - [x]$ nell'intervallo *chiuso e limitato* $[1, 2]$ non ha massimo ($\sup_{x\in[1,2]}(x - [x]) = 1$): essa, come abbiamo già provato, non è continua in $x_0 = 2$.

Osservazione. I punti x_m e x_M sono detti, rispettivamente, *punti* di *minimo assoluto* e di *massimo assoluto* di f in $[a, b]$ e non sono necessariamente unici. I valori $f(x_m)$ e $f(x_M)$ sono rispettivamente il minimo assoluto ed il massimo assoluto di f in $[a, b]$ e, ovviamente, sono unici.

Corollario. *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'immagine di f è l'intervallo chiuso e limitato $[m, M]$, dove*

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Dimostrazione. Per il teorema dei valori intermedi $f([a,b])$ è un intervallo che, per il teorema di Weierstrass, contiene i punti m e M. Di conseguenza, $f([a,b]) = [m,M]$.

Derivate

Definizione. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale definita in un intervallo **aperto** I e sia $x_0 \in I$. Si dice che f è *derivabile* in x_0 se esiste ed è **finito** il limite, per $x \to x_0$, della funzione

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

detta *rapporto incrementale* di f in x_0. Tale limite, quando esiste ed è finito, si chiama derivata di f in x_0 e si denota con uno dei seguenti simboli:

$$f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

In maniera equivalente si può scrivere il rapporto incrementale nella forma

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e farne il limite per $h \to 0$.

Interpretazione geometrica della derivata.

Definizione. Data una funzione reale di variabile reale f, consideriamo un punto (x_0, y_0) del suo grafico (ossia, supponiamo che x_0 stia nel dominio di f e che y_0 sia uguale a $f(x_0)$). Se f è derivabile in x_0, la *retta tangente* al grafico della f in (x_0, y_0) è la retta passante per (x_0, y_0) e avente coefficiente angolare $f'(x_0)$. L'equazione di tale retta è perciò

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Osservazione (che sarà ripresa in seguito). Dalla definizione di derivata si deduce che se una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in I$, allora esiste una funzione continua $h \mapsto \epsilon(h)$ definita in un opportuno intorno di 0 (dipendente dal punto x_0) e nulla in 0, tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \epsilon(h)h.$$

Infatti da
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$
si deduce che la funzione
$$\epsilon(h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h}\,, \quad h \neq 0\,,$$
è infinitesima per $h \to 0$ e può essere prolungata con continuità in $h = 0$ ponendo $\epsilon(0) = 0$.

Se f ammette una tale scrittura, si dice che è *differenziabile* in x_0. In altre parole, abbiamo provato che f derivabile in x_0 implica f differenziabile in x_0. Si può far vedere che la formula precedente caratterizza la derivata: per funzioni di una variabile risulta cioè che f è derivabile in x_0 se e solo se f è differenziabile in x_0. La nozione di differenziabilità risulterà particolarmente significativa per le funzioni di più variabili ed in tal caso non sarà più equivalente alla derivabilità.

L'uguaglianza trovata sopra è detta, come vedremo meglio in seguito, *formula di Taylor del primo ordine di f in x_0* (col resto nella forma di Peano).

Osserviamo che il polinomio $P_1(h) = f(x_0) + f'(x_0)h$ è tale che la differenza $f(x_0+h) - P_1(h)$ tende a zero, per $h \to 0$, più velocemente dell'incremento h. Si dice anche che P_1 rappresenta un'approssimazione lineare (o del prim'ordine) della funzione f.

In alcuni casi, ponendo $h = x - x_0$, si preferisce scrivere l'uguaglianza precedente anche nel seguente modo:
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \epsilon(x-x_0)(x-x_0).$$

Definizione. Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in I se è derivabile in ogni punto $x \in I$.

Esempio. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ costante. Allora f è derivabile in ogni punto x e $f'(x) = 0$. Infatti, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, il rapporto incrementale è identicamente uguale a 0.

Esempio. La funzione $f(x) = x$ è derivabile in ogni punto e si ha $f'(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, il rapporto incrementale è identicamente uguale a 1.

Esempio. Mostriamo che

1) la funzione $f(x) = x^2$ è derivabile in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e risulta $f'(x_0) = 2x_0$. Si ha infatti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \\ \lim_{x\to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0 \,.\end{aligned}$$

2) la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ è derivabile in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e risulta $f'(x_0) = \cos x_0$. Si ha infatti

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \cos x_0 \,,$$

avendo tenuto conto della continuità della funzione coseno e del limite notevole

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = 1 \,,$$

che abbiamo dimostrato in precedenza.

3) la funzione $f(x) = \cos x$ è derivabile in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e risulta $f'(x_0) = -\operatorname{sen} x_0$. La dimostrazione si ottiene in maniera analoga alla precedente, partendo dalla relazione

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \operatorname{sen} \frac{x + x_0}{2} \,.$$

4) la funzione $f(x) = \log x$ è derivabile in ogni punto $x_0 > 0$ e risulta $f'(x_0) = 1/x_0$. Si ha infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x_0 + h) - \log x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log \frac{x_0 + h}{x_0} =$$

$$\lim_{h\to 0} \log(1 + \frac{h}{x_0})^{1/h} = \log e^{1/x_0} = \frac{1}{x_0} \,,$$

avendo tenuto conto della continuità della funzione logaritmo e del fatto che, come vedremo,

$$\lim_{h\to 0} (1 + \frac{h}{x_0})^{1/h} = e^{1/x_0}.$$

In particolare, per $x_0 = 1$, la dimostrazione precedente dà luogo al limite notevole

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(1 + h)}{h} = 1.$$

Teorema (operazioni sulle derivate). *Siano f e g due funzioni derivabili in un punto x_0. Allora (quando ha senso) lo sono anche $f+g$, fg, f/g e risulta*

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= f'(x_0)+g'(x_0);\\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0);\\ (f/g)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.\end{aligned}$$

Esercizio. Usando la regola della derivata del quoziente provare che la derivata di $f(x) = \operatorname{tang} x$ è

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tang}^2 x\,.$$

Teorema (derivata di una funzione composta o regola della catena). *Siano $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ e $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili rispettivamente in x_0 e in $y_0 = f(x_0)$. Allora, la funzione composta $g{\circ}f$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(g{\circ}f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

In altre parole, la derivata della composizione è il prodotto delle derivate (nei punti corrispondenti).

Esercizio. Usando la regola della derivata di una funzione composta calcolare la derivata di $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ e di $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

Il legame tra la continuità e la derivabilità di una funzione è espressa dal teorema seguente.

Teorema. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in I$, allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Basta far vedere che $\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$. Per $x \neq x_0$ si può scrivere

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,(x - x_0)\,.$$

Passando al limite per $x \to x_0$ e tenendo conto che f è derivabile in x_0, si ottiene

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0\,. \square$$

Osservazione. Il teorema precedente mostra che la continuità è una condizione necessaria alla derivabilità. Ovviamente non è una condizione sufficiente come si vede considerando, ad esempio, la funzione $f(x) = |x|$ che è continua ma non derivabile in $x_0 = 0$ (in quanto il limite destro del rapporto incrementale vale 1 mentre il limite sinistro vale -1).

Definizione. La *derivata (laterale) destra [sinistra]* di una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ in un punto x_0 dell'intervallo I, è il limite destro [sinistro] del rapporto incrementale quando esso esista e sia finito. Si indica con $f'_+(x_0)$ $[f'_-(x_0)]$.

Osservazione. Supponiamo che in un punto $x_0 \in I$ esistano le due derivate laterali di una funzione, cioè esistano **finiti** il limite destro e sinistro del rapporto incrementale. Allora la funzione è derivabile in x_0 se e solo se tali derivate coincidono. In tal caso le tre derivate, sinistra, destra e bilaterale sono uguali.

Definizione. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e sia $x_0 \in I$ un punto in cui f è continua. Si dice che x_0 è un punto *angoloso* per f se in tal punto la funzione è derivabile sia a sinistra che a destra ma le derivate laterali sono diverse.

Esempio. La funzione $f(x) = |x|$ ha un punto angoloso in $x_0 = 0$. Infatti $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$.

Definizione. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e sia $x_0 \in I$ un punto in cui f è continua. Si dice che x_0 è una *cuspide* per f se in tal punto il limite destro del rapporto incrementale è $+\infty\,[-\infty]$, mentre il limite sinistro è $-\infty\,[+\infty]$.

Esempio. La funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ ha una cuspide in $x_0 = 0$. Infatti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = +\infty\,; \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = -\infty\,.$$

Esercizio. Stabilire se

1) $f(x) = x|x| + x^2$ è derivabile in $x_0 = 0$;
2) $f(x) = |\log x|$ è derivabile in $x_0 = 1$;
3) $f(x) = |(x-1)^3|$ è derivabile in $x_0 = 1$.

Supponiamo ora che f sia definita nell' intervallo chiuso $[a, b]$. In base alla definizione di derivata data precedentemente, possiamo parlare di derivabilità di f solo nei punti x_0 appartenenti all'intervallo aperto (a, b). La seguente definizione ci permette di dare un senso alla nozione di derivabilità di f anche in a e in b.

Definizione. Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Diremo che f è *derivabile* nell'intervallo *chiuso* $[a, b]$ se è derivabile in (a, b) e se ammette derivata destra in a e derivata sinistra in b. Più in generale, supponiamo che

f sia definita in un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ che, pur non essendo necessariamente un intervallo, abbia la proprietà che ogni $x \in X$ appartenga ad un intervallo non banale contenuto in X. Anche in tal caso, ha ancora senso parlare di derivata di f in $x_0 \in X$ e diremo che f è derivabile in X se è derivabile in ogni $x \in X$.

Esempio. La funzione $f(x) = |x|$ è derivabile nell'intervallo chiuso $[0, 1]$ (e la sua derivata è identicamente uguale a 1 in tale intervallo), ma non lo è ad esempio nell'intervallo $(-1, 1)$ perchè, come abbiamo provato nell'esempio precedente, non è derivabile in $x_0 = 0$. Come vedremo in seguito, la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è derivabile in $(0, +\infty)$, ma non lo è in $[0, +\infty)$ in quanto il suo rapporto incrementale in $x_0 = 0$, cioè $\sqrt{x}/x$ non ammette limite finito per $x \to 0$. La funzione $f(x) = 1/x$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ che è un insieme unione di due intervalli aperti e disgiunti.

Teorema (derivata di una funzione inversa). *Sia $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Esempio. Come applicazione del teorema della derivata di una funzione inversa, mostriamo che $f(x) = \sqrt{x}$ è derivabile per $x > 0$ e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Per comodità nella dimostrazione indichiamo $\varphi(x) = x^2$, $x > 0$, e $\varphi^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Osserviamo che $\varphi'(x) = 2x \neq 0$ per $x > 0$. Pertanto, fissato un punto $y_0 > 0$ (cioè tale che $x_0 = \varphi^{-1}(y_0) > 0$), dal teorema precedente segue

$$(\varphi^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)} = \frac{1}{2x_0}\,,$$

dove $x_0 = \sqrt{y_0}$. Perciò

$$(\varphi^{-1})'(y_0) = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}\,.$$

Esempio. Come applicazione del teorema della derivata di una funzione inversa, mostriamo che $f(x) = e^x$ è derivabile e si ha

$$f'(x) = e^x\,.$$

Per comodità nella dimostrazione indichiamo $\varphi(x) = \log x$ e $\varphi^{-1}(y) = e^y$. Fissato un punto $y_0 \in \mathbb{R}$, dal teorema precedente e ricordando che $\varphi'(x) = 1/x$, si ottiene

$$(\varphi^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)} = \frac{1}{1/x_0} = x_0\,,$$

dove $x_0 = e^{y_0}$. Perciò

$$(\varphi^{-1})'(y_0) = e^{y_0} .$$

Esempio. Come applicazione del teorema della derivata di una funzione inversa, mostriamo che $f(x) = \operatorname{arctang} x$ è derivabile e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} .$$

Per comodità nella dimostrazione indichiamo $\varphi(x) = \operatorname{tang} x$ e $\varphi^{-1}(y) = \operatorname{arctang} y$. Fissato un punto $y_0 \in \mathbb{R}$, dal teorema precedente segue

$$(\varphi^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)} = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 x_0} ,$$

dove $x_0 = \operatorname{arctang} y_0$. Perciò

$$(\varphi^{-1})'(y_0) = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2(\operatorname{arctang} y_0)} = \frac{1}{1+y_0^2} .$$

Esercizio. Mediante il teorema della derivata di una funzione inversa provare che, per ogni $x \in (-1, 1)$, si ha

$$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e

$$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Come abbiamo dimostrato in precedenza, le funzioni arcsen e arccos sono continue nel loro dominio, cioè nell'intervallo chiuso $[-1, 1]$. Notiamo però che non sono derivabili nei punti -1 e 1. Perciò il dominio della derivata di ciascuna di tali funzioni è l'intervallo aperto $(-1, 1)$.

Esercizio. Le funzioni x^α, a^x, $\log_a x$, $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$ sono derivabili e risulta $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$, $Da^x = a^x \log a$, $D \log_a x = 1/(x \log a)$, $D \operatorname{senh} x = \cosh x$, $D \cosh x = \operatorname{senh} x$.

Esercizio. Provare che le funzioni x^x e $(1+x)^{1/x}$ sono derivabili nel loro dominio e risulta $Dx^x = x^x(\log x + 1)$ e $D(1 + x)^{1/x} = (1 + x)^{1/x}[\frac{1}{x}(-\frac{\log(1+x)}{x} + \frac{1}{1+x})]$. (Osserviamo che, poiché ogni numero positivo c può essere scritto nella forma $e^{\log c}$, date due funzioni f e g con $f(x) > 0$, si ha

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \log f(x)} .$$

Perciò si ha, ad esempio, $x^x = e^{x \log x}$, ecc.)

Esercizio. Sia

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\,, & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0\,, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Provare che f_α è derivabile in $x_0 = 0$ se e solo se $\alpha > 1$ e per tali valori di α calcolare $f'_\alpha(0)$.

7^a settimana - dal 28.10.19

Definizione. Data $f\colon X \to \mathbb{R}$, si dice che $x_0 \in X$ è un *punto di massimo [minimo] relativo (o locale) di f in X* se esiste un $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0), \quad [f(x) \geq f(x_0),] \quad \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Il valore $f(x_0)$ è detto massimo [minimo] relativo di f.

Attenzione: i punti di massimo o di minimo relativo di una funzione stanno nel dominio, mentre i minimi e i massimi appartengono all'immagine.

Si osservi che un punto di minimo assoluto per una funzione è anche di minimo relativo ma, in generale, non è vero il contrario.

Esempio. Il punto $x = 0$ è di minimo assoluto (e quindi anche relativo) per la funzione $f(x) = 1 + |x|$, visto che $f(0) = 1$ e $f(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Vedremo in seguito (dopo aver imparato a studiare le funzioni) che il punto $x = 0$ è di minimo relativo per $f(x) = 1 + |x| - x^2$ ma non di minimo assoluto per f, perché $f(x)$ in alcuni punti (ad esempio per $x = 2$) assume valori minori di $f(0)$.

Esempio. La funzione $f(x) = x^3 - 3x$ ha in -1 un punto di massimo relativo e in 1 un punto di minimo relativo. Tali punti non sono né di massimo né di minimo assoluti dal momento che, ad esempio, $f(4) > f(-1)$ e $f(-4) = -f(4) < f(1)$.

Definizione. Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Diremo che $x_0 \in X$ è un *punto di estremo relativo (per f in X)* o anche che è un *punto estremante (per f in X)* se esso è un punto di massimo o di minimo relativo. Il valore $f(x_0)$ è detto estremo relativo.

Teorema (di Fermat). *Sia $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Supponiamo che in un punto $x_0 \in (a, b)$ siano soddisfatte le seguenti ipotesi:*
1) f è derivabile in x_0;
2) x_0 è un punto di estremo relativo per f.
Allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Senza perdere in generalità possiamo supporre x_0 punto di minimo relativo. Perciò, esiste $\delta > 0$ tale che l'intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ è contenuto in (a, b) e $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni x appartenente a tale intorno. Osserviamo ora che si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{se} \quad x_0 < x < x_0 + \delta\,;$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{se} \quad x_0 - \delta < x < x_0\,.$$

Essendo f derivabile in x_0, la derivata destra e la derivata sinistra di f in x_0 esistono e sono uguali fra loro. D'altra parte, passando al limite nelle due disuguaglianze precedenti (e ricordando una conseguenza del Teorema della permanenza del segno per i limiti), si ottiene

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0\,, \quad f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0\,.$$

Di conseguenza, $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0\,.$ □

Osservazione. Se f è una funzione derivabile in un intervallo (a, b), l'annullarsi della derivata in $x_0 \in (a, b)$ è condizione necessaria ma non sufficiente affinché x_0 sia un punto di estremo relativo. Consideriamo infatti nell'intervallo $(-1, 1)$ la funzione $f(x) = x^3$. Essa è derivabile in $(-1, 1)$ e $f'(x) = 3x^2$ si annulla in $x_0 = 0$. D'altra parte la funzione è strettamente crescente e quindi non ha punti di estremo relativo in $(-1, 1)$.

Definizione Un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ si dice *punto critico* o *punto stazionario* di f in (a, b).

Osservazione. In base al teorema di Fermat, data $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, gli eventuali punti di estremo relativo per f (in $[a, b]$) vanno ricercati

- o tra i punti critici di f appartenenti ad (a, b);
- o tra i punti di (a, b) in cui f non è derivabile;
- o negli estremi dell'intervallo $[a, b]$ (cioè a e b).

In altre parole, se un punto è di estremo relativo per f, è *necessario* che almeno una delle tre sia soddisfatta.

Tuttavia, nessuna di queste tre condizioni è sufficiente affinché un punto sia di estremo relativo.

Esempio. La funzione $f(x) = |x|$ ammette minimo assoluto nel punto $x_m = 0$ in ogni intervallo $[a, b]$ tale che $0 \in (a, b)$. Tale funzione non è però derivabile in 0.

Esempio. La funzione $f(x) = x+1$ è derivabile in $[0, 1]$ (quindi anche continua); perciò per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti in [0,1]. Il minimo è assunto in $x_m = 0$ e il massimo in $x_M = 1$. La derivata di f non si annulla mai in $(0, 1)$.

Osservazione. Nell'esempio precedente si può osservare che $f'(0)$ e $f'(1)$ sono diverse da zero. Da questo fatto si sarebbe potuto dedurre che i punti 0 e 1 sono estremi relativi per f in $[0, 1]$. Vale infatti il seguente risultato:

"Sia $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in a. Se $f'(a) \neq 0$, allora a è punto di estremo relativo. Più precisamente, se $f'(a) > 0$ (se $f'(a) < 0$), allora a è punto di minimo (di massimo) relativo."

Sia infatti $f'(a) > 0$. Per il Teorema della permanenza del segno, esiste $\delta > 0$ tale che, se $x \in (a, a+\delta)$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0\,.$$

Ne segue che $f(x) > f(a)$ in un intorno (destro) di a, cioè a è punto di minimo relativo per f in $[a,b)$.

Teorema (di Rolle). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione soddisfacente le seguenti condizioni:*
1) f è continua in $[a,b]$;
2) f è derivabile in (a,b);
3) $f(a) = f(b)$.
Allora esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Poiché f è continua in $[a,b]$ che è un intervallo limitato e chiuso, per il Teorema di Weierstrass essa ammette minimo e massimo assoluti. Esistono cioè (almeno) due punti $x_m, x_M \in [a,b]$ per i quali risulta

$$\min_{[a,b]} f(x) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = \max_{[a,b]} f(x)$$

per ogni $x \in [a,b]$. Se uno dei due punti, ad esempio x_m, appartiene all'intervallo aperto (a,b), allora, essendo f derivabile in tal punto, dal Teorema di Fermat segue $f'(x_m) = 0$ (e la tesi, in questo caso, è dimostrata ponendo $x_0 = x_m$). Se, invece, nessuno dei due punti appartiene ad (a,b), allora essi coincidono con gli estremi a e b dell'intervallo $[a,b]$ e quindi, per l'ipotesi 3), si ha $f(x_m) = f(x_M)$. In tal caso, essendo $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$, la funzione risulta costante e, di conseguenza, la derivata è nulla in ogni punto $x \in (a,b)$. $\square$

Esempio. La tesi del teorema di Rolle può non valere se si suppone f continua solo nell'intervallo aperto (a,b). Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = x - [x]$ nell'intervallo $[0,1]$. Essa non è continua in $x = 1$, è derivabile in $(0,1)$ e $f(0) = f(1)$. Tuttavia la sua derivata non si annulla mai in $(0,1)$.

Esercizio. La funzione $f(x) = |x|$ è continua in $[-1,1]$ e $f(-1) = f(1)$, ma la sua derivata non si annulla mai in $(-1,1)$. Come mai questo non contraddice il teorema di Rolle?

Il seguente risultato è un'importante estensione del teorema di Rolle.

Teorema (di Lagrange (o del valor medio)). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione soddisfacente le seguenti condizioni:*
1) f è continua in $[a,b]$;
2) f è derivabile in (a,b).
Allora esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione. Sia

$$\varphi(x) = f(x) - \Big(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\Big).$$

La funzione φ è ovviamente continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) come somma di f (che è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) per ipotesi) con un polinomio. Inoltre è immediato verificare che risulta $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Perciò, per il teorema di Rolle, esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $\varphi'(x_0) = 0$. La tesi segue dal fatto che

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Osservazione. Dal punto di vista geometrico, il teorema di Lagrange prova che esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ in cui la tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è parallela alla retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Osservazione. In certi casi è utile scrivere la tesi del teorema precedente nella forma seguente:

Allora, dati x_1 e x_2 in $[a,b]$ esiste un punto $x_0 \in (x_1, x_2)$ se $x_1 < x_2$, oppure $x_0 \in (x_2, x_1)$ se $x_2 < x_1$, tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1).$$

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ definita in un intervallo I e derivabile in ogni punto di I. La funzione che ad ogni $x \in I$ associa il numero $f'(x)$ si chiama *derivata (o derivata prima)* di f e si denota con uno dei seguenti simboli:

$$f', \quad Df, \quad \frac{df}{dx}.$$

Enunciamo ora alcune importanti conseguenze del teorema di Lagrange.

Corollario. *Sia* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *derivabile in un intervallo* I *e tale che* $f'(x) = 0$ *per ogni* $x \in I$. *Allora* f *è costante in* I.

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in I$. Per il teorema di Lagrange, esiste un punto x_0 appartenente all'intervallo di estremi x_1 e x_2 tale che $f(x_2)-f(x_1) = f'(x_0)(x_2-x_1)$. Essendo $f'(x_0) = 0$, si ottiene $f(x_1) = f(x_2)$ e, per l'arbitrarietà di x_1 e x_2, si deduce che f è costante in I. □

Osservazione. Viceversa, come già osservato in precedenza, immediata conseguenza della definizione di derivata è il fatto che se f è costante, allora la sua derivata è nulla in tutti i punti.

Osservazione. Nel precedente corollario non si può togliere l'ipotesi che f sia definita in un intervallo. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x \in [1,2] \\ 5 & \text{se } x \in [3,4] \end{cases}$$

è tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [1,2] \cup [3,4]$, ma non è costante in tale insieme che, ovviamente, non è un intervallo.

Corollario (Criterio di monotonia). *Sia* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *derivabile in un intervallo* I *e tale che* $f'(x) \geq 0$ *[*$f'(x) \leq 0$*] per ogni* $x \in I$. *Allora* f *è crescente [decrescente] in* I.

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in I$ e supponiamo $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange, esiste un punto $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$. Essendo $f'(x_0) \geq 0$, si ottiene

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0\,,$$

da cui, per l'arbitrarietà di x_1 e x_2, si deduce che f è crescente in I. Analoga dimostrazione vale nel caso in cui $f'(x) \leq 0$. □

Osservazione. Notiamo che il corollario precedente si può invertire. Si ha infatti che se f è derivabile e crescente [decrescente] in un intervallo I, allora $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$] per ogni $x \in I$. Questa implicazione non è però conseguenza del teorema di Lagrange, ma solo della definizione di derivata e del Teorema della permanenza del segno. Infatti, se f è crescente, fissato $x_0 \in I$, si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

per ogni $x \neq x_0$. Di conseguenza, poiché f è derivabile in x_0, passando al limite per $x \to x_0$ (e ricordando una conseguenza del Teorema della permanenza del segno), si ottiene $f'(x_0) \geq 0$. Per l'arbitrarietà di x_0 si può concludere che f' è non negativa in I.

Con una dimostrazione analoga a quella del corollario precedente, si ottiene anche il seguente

Corollario (Criterio di stretta monotonia). *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in un intervallo I e tale che $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] per ogni $x \in I$. Allora f è strettamente crescente [decrescente] in I.*

Osservazione. Il corollario precedente non si può invertire. Dal fatto che una funzione derivabile sia, ad esempio, strettamente crescente in un intervallo, non si può dedurre in generale che essa abbia derivata positiva, come si verifica immediatamente considerando la funzione $f(x) = x^3$ che è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma ha derivata non strettamente positiva (infatti $f'(x) = 3x^2$ che si annulla per $x = 0$). In altre parole, pur rafforzando l'ipotesi (supponendo cioè f strettamente crescente) la tesi rimane $f' \geq 0$ in I.

Esercizio. Determinare i punti di estremo relativo e studiare la monotonia delle seguenti funzioni nel loro dominio :

$$f(x) = |1 - x^2| - 3\,, \quad f(x) = x\sqrt{x^2+1}\,, \quad \arccos(x^2 - x^4).$$

Il teorema seguente è una facile conseguenza del teorema di Lagrange.

Teorema. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b]$. Supponiamo che esista il limite per $x \to a^+$ di f'. Se tale limite è finito, allora f è derivabile in a e la funzione f' risulta continua in a, cioè si ha*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x)\,.$$

Se, invece, tale limite è infinito, allora f non è derivabile in a e la retta tangente al grafico di f in $(a, f(a))$ è verticale.

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange, esiste $c_x \in (a,x)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)\,.$$

Poiché $c_x \to a^+$ quando $x \to a^+$, la conclusione si ottiene passando al limite. $\square$

Osservazione. Un analogo risultato vale se f è derivabile in $[a,b)$ ed esiste il limite per $x \to b^-$ di f'.

Osservazione. Il teorema precedente fornisce una condizione solo sufficiente perché $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sia derivabile in a. Infatti, f può essere derivabile in a anche se non esiste il limite di $f'(x)$ per $x \to a^+$. Ad esempio, consideriamo in $[0, +\infty)$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Essa è continua in 0 in quanto $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x) = 0 = f(0)$. Inoltre, è ovviamente derivabile (e, quindi, continua) in $(0, +\infty)$ in quanto prodotto e composizione di funzioni derivabili. Proviamo che essa è derivabile anche nel punto $x_0 = 0$. Infatti, applicando la definizione di derivata, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{x} = 0\,,$$

cioè $f'(0) = 0$. D'altra parte, poiché per $x > 0$ la derivata di f è

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\,,$$

si ha che non esiste il limite per $x \to 0$ di $f'(x)$ in quanto, come vedremo in seguito, il limite per $x \to 0$ di $\cos(1/x)$ non esiste. Pertanto, f è derivabile in 0 ma la funzione f' non è continua in 0 (più precisamente f' ha in 0 una discontinuità di seconda specie).

Ricordando che una funzione $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ se e solo se esistono finiti $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ e sono uguali fra loro, dal teorema precedente si deduce immediatamente il seguente risultato:

Corollario. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in un intervallo I. Allora la funzione f' non può ammettere discontinuità di prima specie in I.*

Esercizio. Provare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x+1|} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt[3]{(x-1)^2} + e - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è derivabile in tutti i punti del suo dominio ad eccezione di $x = -1$ e $x = 0$, che sono punti angolosi, e di $x = 1$ che è una cuspide.

Asintoti

Definizione. Data $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, la retta $y = mx + n$ si dice *asintoto destro* (o asintoto per $x \to +\infty$) per f, se

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0.$$

Se il coefficiente angolare m è uguale a zero, l'asintoto si dice *orizzontale*, altrimenti si dice *obliquo*. Un'analoga definizione vale per il concetto di *asintoto sinistro* (o asintoto per $x \to -\infty$).

Osservazione. L'asintoto destro (sinistro) di una funzione, se esiste, è unico.

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = 2x - 1 + \operatorname{sen} x/x$. Dalla definizione di asintoto segue subito che la retta $y = 2x - 1$ è l'asintoto destro (e anche sinistro) per f. Infatti, la funzione $\operatorname{sen} x/x$, che coincide con la differenza $f(x) - (2x - 1)$, tende a zero per $x \to \infty$ essendo il prodotto di una funzione limitata per una infinitesima.

Osservazione. Più in generale, se si ha $f(x) = mx + n + \varphi(x)$, dove $\varphi(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, allora $y = mx + n$ è l'asintoto destro per f.

Esempio. La funzione $f(x) = x^2$ non ammette asintoto destro. Infatti, la differenza tra x^2 e un polinomio di primo grado è un polinomio di secondo grado, e non può quindi tendere a zero per $x \to +\infty$.

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente affinché $y = mx + n$ sia l'asintoto destro [sinistro] per una funzione reale di variabile reale f è che*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad e \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = n.$$

$$\left[\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = n\right].$$

Osservazione. Dal teorema si deduce subito che se $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$, allora la retta $y = l$ è l'asintoto destro per f.

Si può provare che se una funzione ammette asintoto destro e se esiste il limite per $x \to +\infty$ della sua derivata, allora questo limite coincide con il coefficiente angolare dell'asintoto. Non è detto comunque che se una funzione ammette asintoto per $x \to +\infty$, debba necessariamente esistere il limite per $x \to +\infty$ della sua derivata. Ad esempio, l'asintoto destro di $f(x) = x + (\operatorname{sen} x^2)/x$ è la retta $y = x$, ma non esiste il limite per $x \to +\infty$ di $f'(x)$. Può anche capitare che una funzione non abbia asintoto destro ma la derivata ammetta limite finito per $x \to +\infty$. Un esempio di quest'ultimo caso è dato da $\log x$.

Osservazione. Si usa talvolta dire che una retta $x = x_0$ è un *asintoto verticale* per una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ se accade che $|f(x)| \to +\infty$ per $x \to x_0$.

Osserviamo che l'informazione "$x = x_0$ è un asintoto verticale per f" non dice molto sul comportamento di $f(x)$ in un intorno di x_0. Per disegnare il grafico di f, infatti, occorre conoscere i due limiti per $x \to x_0^-$ e per $x \to x_0^+$ di $f(x)$. Pertanto se, ad esempio, in uno studio di funzione, elencando i limiti importanti, si è già affermato che $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0^-$ e $f(x) \to -\infty$ per $x \to x_0^+$, è inutile aggiungere poi che $x = x_0$ è un asintoto verticale per f. Così dicendo, non si danno ulteriori informazioni.

Derivate successive

La derivata della derivata di una funzione f si chiama derivata seconda di f e si indica con f'', con $D^2 f$ o con

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}\,.$$

In generale, la derivata della derivata $(n-1)$-esima di f si chiama derivata n-esima e si denota con $f^{(n)}$, con $D^n f$ o con

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^n f}{dx^n}\,.$$

Definizione. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ definita in un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice di classe C^0 in X se è continua in X. Supponiamo che l'insieme X abbia anche la proprietà che ogni $x \in X$ appartenga ad un intervallo non banale contenuto in X. Si dice che f è di classe C^1 in X (o che appartiene alla classe C^1) se è derivabile in X e la sua derivata è di classe C^0. In generale, si dirà che f è (di classe) C^n, $n \in \mathbb{N}$, se è derivabile n volte e la sua derivata n-esima è continua. Si dice infine che f è (di classe) C^∞ se è C^n per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per indicare che f è di classe C^n [C^∞] in X si scrive $f \in C^n(X)$ [$f \in C^\infty(X)$].

Abbiamo visto che le funzioni derivabili sono anche continue. Perciò, se f è derivabile n volte risulta che le sue derivate fino all'ordine $n-1$ sono continue. Di conseguenza, se f è derivabile n volte, allora è di classe C^k per ogni $k \leq n-1$. Notiamo che il fatto che f sia derivabile n volte, non implica che f sia di classe C^n. Basta considerare, ad esempio, la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Come già provato, f è derivabile nel punto $x = 0$ ma non esiste il limite per x che tende a 0 di $f'(x)$. In altre parole, f è derivabile in 0 ma f' non è continua in 0. Quindi f che è di classe C^0, non è di classe C^1 in $[0, +\infty)$.

Teorema (di regolarità delle funzioni combinate). *La somma, il prodotto, il quoziente e la composizione di funzioni di classe C^n, quando (e dove) ha senso, è ancora una funzione di classe C^n.*

Funzioni convesse in un intervallo

Definizione. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intervallo aperto I. Allora f si dice *convessa [concava] in* I se per ogni $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non ha punti al di sotto [sopra] del grafico di f. Se inoltre il segmento non ha punti in comune con il grafico di f tranne gli estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, allora f si dice *strettamente convessa [concava] in* I.

Funzioni convesse sono, ad esempio, $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \cosh x$, $f(x) = x^2 + |x|$; funzioni concave sono $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \log x$.

Osservazione. Dalla definizione precedente si deduce immediatamente che una funzione f è concava in I se e solo se $-f$ è convessa in I.

Nel caso di funzioni derivabili, si ha la seguente caratterizzazione:

Teorema. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in un intervallo aperto I. Allora f è convessa [concava] in I se e solo se la retta tangente ad un punto qualunque del suo grafico sta sotto [sopra] il grafico, ossia se e solo se*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \ \forall x, x_0 \in I$$

$$[f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] \, .$$

In particolare, f è strettamente convessa [concava] in I se e solo se

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in I, \, x \neq x_0$$

$$[f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)], \quad \forall x, x_0 \in I, \, x \neq x_0 \, .$$

Teorema (Criterio di convessità). *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile in un intervallo aperto I. Allora si ha:*

1) f è (strettamente) convessa [concava] in I se e solo se f' è (strettamente) crescente [decrescente] in I.

Se inoltre f è derivabile due volte in I allora si ha:

2) f è convessa [concava] se e solo se $f''(x) \geq 0$ [$f''(x) \leq 0$] per ogni $x \in I$;

3) se $f''(x) > 0$ [$f''(x) < 0$] per ogni $x \in I$, allora f è strettamente convessa in I.

Osservazione. La condizione 3) del teorema precedente non può essere invertita. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^4$ è strettamente convessa in $\mathbb{R}$ (avendo la derivata prima strettamente crescente), ma $f''(x) = 12x^2$ non è strettamente positiva poiché si annulla per $x = 0$.

8^a settimana - dal 4.11.19

Abbiamo visto che il teorema di Fermat fornisce una condizione necessaria affinché un punto x_0 di un intervallo aperto I sia estremante. Diamo ora una condizione sufficiente.

Teorema. *Sia f di classe C^2 in un intervallo aperto I e sia $x_0 \in I$ punto critico per f (cioè $f'(x_0) = 0$). Allora, se $f''(x_0) > 0$ [$f''(x_0) < 0$] il punto x_0 è di minimo [massimo] relativo forte.*

Dimostrazione. Proviamo il teorema nel caso $f''(x_0) > 0$. Per il teorema della permanenza del segno esiste $\delta > 0$ tale che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Di conseguenza f è strettamente convessa in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e, quindi, $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per $x \neq x_0$ in tale intervallo. Essendo $f'(x_0) = 0$, si conclude che $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, cioè x_0 è punto di minimo relativo forte. $\square$

Osservazione. La condizione sulla derivata seconda espressa nel teorema precedente non è necessaria affinché x_0 sia di estremo relativo. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^4$ ha un punto di minimo assoluto in $x_0 = 0$, ma $f''(x) = 12x^2$ si annulla per $x_0 = 0$.

Definizione. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intervallo aperto I e sia $x_0 \in I$ un punto in cui f è derivabile. Si dice che x_0 è un *punto di flesso (per f)* se esistono un intorno destro e un intorno sinistro di x_0 in I nei quali f ha concavità discordi, cioè da una parte la funzione è convessa e dall'altra è concava.

Osserviamo che se x_0 è un punto di flesso, la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$, che esiste perché f è derivabile in x_0, attraversa il grafico stesso.

Osservazione. Notiamo che il solo cambio di concavità di una funzione nel passaggio per il punto x_0 (senza la derivabilità in x_0) non garantisce la presenza di un punto di flesso. Ad esempio, la funzione $f(x) = |\log x|$ è convessa a sinistra di 1 e concava a destra e non ha flessi (come abbiamo già visto essa non è derivabile in $x_0 = 1$).

Talvolta si usa parlare di punto di flesso anche nel caso in cui, pur non essendo f derivabile in x_0, il limite del rapporto incrementale di f in x_0 sia $+\infty$ o $-\infty$. Sia, ad esempio, f continua in I, derivabile in $I \setminus \{x_0\}$ e tale che $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$ oppure $-\infty$. Se esistono un intorno destro e un intorno sinistro di x_0 in I nei quali f ha concavità discordi, diremo che f ha in x_0 un *flesso a tangente verticale.* Ad esempio, la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ha in $x = 0$ un flesso a tangente verticale.

Una condizione necessaria affinché un punto sia di flesso è data dal seguente

Teorema. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ di classe C^2 in un intervallo aperto I e sia $x_0 \in I$ punto di flesso. Allora $f''(x_0) = 0$.*

Notiamo però che l'annullarsi della derivata seconda non è una condizione sufficiente affinché un punto sia di flesso come si vede subito considerando $f(x) = x^4$ che in $x_0 = 0$ ha un punto di minimo pur essendo $f''(0) = 0$.

Tuttavia, applicando il Criterio di monotonia alla funzione f', si ottiene la seguente condizione sufficiente

Teorema. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ di classe C^2 in un intervallo aperto I e sia x_0 un punto di I in cui la derivata seconda cambia segno (da una parte positiva e dall'altra negativa). Allora, x_0 è un punto di flesso per f.*

Esempio. La funzione $f(x) = x^3$ ha un flesso nel punto $x = 0$, perché in tale punto $f''(x) = 6x$ si annulla cambiando segno.

Studio di alcune funzioni.

N.B. Tenere presente il modello per lo studio di funzione distribuito in classe e che si può scaricare all'indirizzo:

http://www.dma.unifi.it/˜pera/modello.pdf

$$f(x) = e^{|\log|x||} \quad \text{(considerazioni sulle simmetrie)}$$

$$f(x) = A \operatorname{sen} x; \quad f(x) = \operatorname{sen} n\,x\,, n \in \mathbb{N}; \quad f(x) = x\,\operatorname{sen} x\,; \quad f(x) = e^x\,\operatorname{sen} x$$

(considerazioni su traslazioni, dilatazioni, ecc., a partire dalla funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$).

$$f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x+1} \quad \text{(considerazioni sui punti di non derivabilità)}$$

$$f(x) = \sqrt[5]{x^5 - 5x^4} \quad \text{(considerazioni sugli asintoti obliqui)}$$

Esercizio. Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{|x|+1}\,; \quad f(x) = \log(\log x^3 - \log x); \quad f(x) = \log(\log^3 x - \log x);$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x}{\cos x}}\,; \quad f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{1}{\log|x-1|}\,.$$

Complementi sulla teoria dei limiti

Ricordiamo che una funzione si dice *infinitesima* per $x \to \alpha$ (dove α può essere $x_0 \in \mathbb{R}$ o uno dei simboli $x_0^-, x_0^+, +\infty, -\infty$) se tende a zero per $x \to \alpha$. Analogamente, diremo che una funzione è *infinita* per $x \to \alpha$ se tende all'infinito (per $x \to \alpha$).

I teoremi di de l'Hôpital sono utili strumenti per il calcolo del limite del rapporto di due funzioni entrambe infinitesime o infinite per $x \to \alpha$. In altre parole, rappresentano un artificio (anche se non l'unico) per determinare il limite delle cosiddette forme indeterminate $0/0$ e ∞/∞. Si possono anche usare (con opportune trasformazioni) per risolvere forme indeterminate del tipo $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

Teorema (di de l'Hôpital). *Siano f e g due funzioni infinitesime o infinite per $x \to \alpha$ e derivabili in un intorno forato di α. Supponiamo che in tale intorno si abbia $g'(x) \neq 0$. Allora, se esiste il limite (finito o infinito) per $x \to \alpha$ di $f'(x)/g'(x)$, risulta*

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Per dare un'idea del significato del teorema consideriamo il caso particolare in cui f e g siano derivabili con continuità ad esempio in un intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e siano tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e $g'(x_0) \neq 0$. In tal caso, ricordando l'equivalenza tra derivabilità e differenziabilità per funzioni di una variabile si ottiene, in un opportuno intorno forato di x_0,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon_1(x - x_0)} =$$

$$= \frac{(x - x_0)(f'(x_0) + \epsilon(x - x_0))}{(x - x_0)(g'(x_0) + \epsilon_1(x - x_0))} = \frac{f'(x_0) + \epsilon(x - x_0)}{g'(x_0) + \epsilon_1(x - x_0)},$$

dove ϵ e ϵ_1 sono funzioni infinitesime e continue in x_0. Passando al limite per $x \to x_0$ si ottiene

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Osservazione. La condizione espressa dal Teorema di de l'Hôpital è solo sufficiente. Ad esempio infatti

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + \cos x}{3x + \operatorname{sen} x}$$

tende a $2/3$ per $x \to +\infty$, ma

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 - \operatorname{sen} x}{3 + \cos x}$$

non ammette limite per $x \to +\infty$.

Esempio. È utile l'applicazione del Teorema di de l'Hôpital per provare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0\,.$$

Ad esempio, per quanto riguarda il primo limite, se applichiamo n volte il teorema di de l'Hôpital ci riduciamo a calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{n\,!}{e^x}$$

che ovviamente vale 0 (ricordiamo che, dato $n \in \mathbb{N}\,, n \geq 1$, il numero $n\,!$, che si legge n *fattoriale*, è così definito $n\,! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$).

Esempio. Il Teorema di de L'Hôpital si può applicare anche in alcuni casi in cui il rapporto $f(x)/g(x)$ non è immediatamente riconoscibile. Per esempio, si può provare che

$$\lim_{x\to 0} x \log x = 0$$

con de L'Hôpital scrivendo

$$x \log x = \frac{\log x}{1/x}.$$

Più in generale, con lo stesso metodo, si ottiene che

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha (|\log x|)^\beta = 0, \quad (\alpha > 0,\, \beta > 0).$$

Osservazione. In alcuni casi l'uso del Teorema di de l'Hôpital non porta ad alcun risultato. Ad esempio, siano $f(x) = \sqrt{x^2+1}\,, g(x) = x$ e, quindi, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,, g'(x) = 1\,$. Applicando il Teorema di de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,,$$

che è il limite della funzione reciproca di quella di partenza. D'altra parte, da un calcolo diretto, si ha subito

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1\,.$$

Osservazione. Nell'applicare il Teorema di de l'Hôpital si deve fare attenzione che le ipotesi siano rispettate; per esempio che il limite di un rapporto $f(x)/g(x)$

sia una forma indeterminata. Se infatti lo applicassimo al rapporto $x/(x+1)$ per $x \to 0$, che non è una forma indeterminata, otterremmo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 1\,,$$

che ovviamente è falso.

Calcolo di $\lim_{x\to\alpha} f(x)^{g(x)}$**.**

Consideriamo il limite per $x \to \alpha$ di una funzione del tipo $f(x)^{g(x)}$, dove $f(x) > 0$. Poiché ogni numero positivo c può essere scritto nella forma $e^{\log c}$, si ha

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)}\,.$$

È importante quindi studiare il limite per $x \to \alpha$ della funzione $g(x)\log f(x)$.

Supponiamo che, per $x \to \alpha$, $f(x) \to a$ e $g(x) \to b$, dove a e b appartengono ai reali estesi. Nel caso che $b \log a$ non sia una forma indeterminata, in base alle convenzioni fatte sopra possiamo affermare che

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} e^{g(x)\log f(x)} = e^{\lim_{x\to\alpha} g(x)\log f(x)} = e^{b\log a}\,.$$

Ovviamente, nei passaggi precedenti si è tenuto conto della continuità delle funzioni e^x e $\log x$.

Analizziamo ora in quali casi la forma $b \log a$ risulta indeterminata. Per semplicità di linguaggio, in ciò che segue, facciamo le seguenti convenzioni: $e^{-\infty} = 0$, $e^{+\infty} = +\infty$, $\log 0 = -\infty$, $\log(+\infty) = +\infty$.

Si hanno solo due possibilità:
1) $b = 0$ e $\log a = \infty$;
2) $b = \infty$ e $\log a = 0$.

Il primo caso dà luogo a due sottocasi: $a = 0$ e $a = +\infty$. Il caso 2) può capitare solo se $a = 1$. La forma $b \log a$ risulta quindi indeterminata nelle seguenti tre situazioni:
a) $a = 0$ e $b = 0$ (forma indeterminata 0^0);
b) $a = +\infty$ e $b = 0$ (forma indeterminata ∞^0);
c) $a = 1$ e $b = \infty$ (forma indeterminata 1^∞).

Esempi di forme indeterminate delle potenze:

(0^0) $\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\log x} = e^{\lim_{x\to 0} x\log x} = e^0 = 1$;

(∞^0) $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to +\infty} e^{(\log x)/x} = e^{\lim_{x\to +\infty} (\log x)/x} = e^0 = 1$;

(1^∞) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^{\lim_{x\to 0} (1/x)\log(1+x)} = e^1 = e$.

Per i primi due limiti siamo ricondotti a $\lim_{x\to 0} x \log x$ e $\lim_{x\to +\infty} \log x/x$ che, come abbiamo visto, si calcolano immediatamente applicando il Teorema di de l'Hôpital. Il terzo limite dipende dal limite notevole $\lim_{x\to 0} \log(1+x)/x = 1$. Si potrebbe pensare di calcolare in modo più semplice $\lim_{x\to 0} \log(1+x)/x$ applicando il Teorema di de l'Hôpital invece di ricorrere alla dimostrazione più complicata di tale limite notevole fatta in precedenza (vedi gli esempi successivi alla definizione di derivata). Basta però osservare che tale limite notevole non è altro che il limite del rapporto incrementale della funzione $x \mapsto \log(1+x)$ in $x_0 = 0$ (cioè è la derivata di $x \mapsto \log(1+x)$ in $x_0 = 0$) e quindi non avrebbe senso **usare** la derivata di $x \mapsto \log(1+x)$ (cosa che si farebbe applicando il Teorema di de l'Hôpital) per **calcolare** la derivata di $x \mapsto \log(1+x)$.

Infinitesimi e infiniti

Definizione. Siano f, g due infinitesimi [infiniti] per $x \to \alpha$, dove con α indicheremo $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure uno dei simboli $+\infty, -\infty, x_0^+, x_0^-$. Supponiamo $g(x) \neq 0$ in un intorno forato di α. Si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono *infinitesimi [infiniti] dello stesso ordine* se il rapporto $f(x)/g(x)$ tende ad un numero finito e diverso da zero (per $x \to \alpha$). Si dice che f e g sono due *infinitesimi [infiniti] equivalenti* (per $x \to \alpha$), e si scrive "$f(x) \cong g(x)$ per $x \to \alpha$", se $f(x)/g(x) \to 1$ per $x \to \alpha$. Si osservi che se due infinitesimi [infiniti] sono equivalenti, allora sono anche dello stesso ordine (ma in generale non è vero il viceversa). Si dice che $f(x)$ è un *infinitesimo di ordine superiore a [infinito di ordine inferiore a]* $g(x)$ se il rapporto $f(x)/g(x)$ tende a zero per $x \to \alpha$. Si dice che due infinitesimi [infiniti] sono non confrontabili se il rapporto $f(x)/g(x)$ non ammette limite per $x \to \alpha$.

Talvolta, quando si afferma che una certa funzione $f(x)$ è infinitesima [infinita] per $x \to \alpha$, risulta superflua la precisazione "per $x \to \alpha$", quando è evidente dal contesto o dalla natura di $f(x)$ quale sia il punto α a cui deve tendere la variabile affinché $f(x)$ risulti infinitesima [infinita]. Ad esempio, se si afferma che x^2 è un infinitesimo, è inutile aggiungere che lo è per $x \to 0$, in quanto $x = 0$ è l'unico possibile punto a cui può tendere x in modo che x^2 sia un infinitesimo.

Esempi di infinitesimi per $x \to 0$:

$$x, \quad \operatorname{sen} x, \quad |x|, \quad x + x^2, \quad 1 - \cos x, \quad \sqrt{|x|},$$

$$x^2/(1+\cos x), \quad 2x, \quad x^2 - x, \quad \operatorname{tang}(\pi x) \quad x^2 \operatorname{sen}(1/x)\,.$$

Tenendo presente le regole di calcolo dei limiti, osserviamo che (per $x \to 0$) $x \cong \operatorname{sen} x$, che $1-\cos x$ è di ordine superiore ad x, che $1-\cos x$ è dello stesso ordine di x^2 (ma non equivalente), che x è di ordine superiore a $\sqrt{|x|}$, che $1 - \cos x \cong x^2/2 \cong x^2/(1+\cos x)$, che $2x$ e $x^2 - x$ sono dello stesso ordine, che $\operatorname{tang}(\pi x) \cong \pi x$, che $x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ è di ordine superiore a x ma non è confrontabile con x^2.

Esempi di infinitesimi per $x \to +\infty$:

$$1/x, \quad 1/x^2, \quad 1/|x|, \quad 1/(x+x^2), \quad \operatorname{sen} x/(x-\cos x),$$

$$1/\sqrt{x}, \quad 2/x+1/x^3, \quad x/(1+x-x^2), \quad \operatorname{sen}(1/x), \quad \operatorname{sen}(1/x)+1/x^2\,.$$

Osserviamo che (per $x \to +\infty$) $1/x^2$ è di ordine superiore a $1/x$, che $1/(x+x^2)$ è equivalente a $1/x^2$; che $1/x$ è dello stesso ordine di $2/x+1/x^3$, che $x/(1+x-x^2)$ e $\operatorname{sen}(1/x)+1/x^2$ sono dello stesso ordine.

Ulteriori esempi di infinitesimi:
$\operatorname{sen} x$ per $x \to \pi$; $\operatorname{sen} x/x$ per $x \to \pm\infty$; $\sqrt{2-x}$ per $x \to 2$; $\sqrt{2-x}$ per $x \to 2^-$; $\sqrt{|2-x|}$ per $x \to 2$; $\sqrt{|2-x|}$ per $x \to 2^+$; $1/x$ per $x \to -\infty$; $1/x$ per $x \to \pm\infty$; $x+\sqrt{x^2-1}$ per $x \to -\infty$; $x-\sqrt{x^2-1}$ per $x \to +\infty$; $\operatorname{tang} x$ per $x \to \pi$.

Esempi di infiniti per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$:

$$x, \quad |x|, \quad x+x^2, \quad \sqrt{|x|}, \quad a^x\,(a>1), \quad \log x$$

$$x^3/(1+\operatorname{arctang} x), \quad 3x^2, \quad x^2-x, \quad x^2\operatorname{sen}(1/x), \quad x^2(3+\operatorname{sen} x)\,.$$

Tenendo presente le regole di calcolo dei limiti, osserviamo che (per $x \to \pm\infty$) $x+x^2$ è dello stesso ordine di x^2 ma è di ordine superiore ad x, che $x^3/(1+\operatorname{arctang} x)$ è dello stesso ordine di x^3 (ma non equivalente), che x è di ordine superiore a $\sqrt{|x|}$, che $3x^2$ e x^2-x sono dello stesso ordine, che $x^2\operatorname{sen}(1/x)$ è dello stesso ordine di x, che $x^2(3+\operatorname{sen} x)$ è di ordine superiore a x, ma non è confrontabile con x^2.

Esempi di infiniti per $x \to 0$:

$$1/x, \quad 1/x^2, \quad 1/|x|, \quad 1/(x+x^2),$$

$$1/\sqrt{x}, \quad 2/x+1/x^3, \quad \sqrt{x}/(x-x^2)\,.$$

Osserviamo, ad esempio, che $1/(x+x^2)$ è dello stesso ordine di $1/x$ mentre è di ordine inferiore a $1/x^2$ e che $2/x+1/x^3$ è dello stesso ordine di $1/x^3$

Ulteriori esempi di infiniti:
$1/\operatorname{sen} x$ per $x \to \pi^+$; $1/\operatorname{sen} x$ per $x \to \pi^-$; $1/\sqrt{2-x}$ per $x \to 2^-$; $1/\sqrt{|2-x|}$ per $x \to 2$; $1/|\log x|$ per $x \to 1$; $\operatorname{tang} x$ per $x \to \pi/2^-$; $\operatorname{tang} x$ per $x \to \pi/2^+$.

9^a **settimana - dal 11.11.19**

Definizione. Siano f, φ due infinitesimi [infiniti] per $x \to \alpha$. Supponiamo $\varphi(x) \neq 0$ in un intorno forato di α. Se esistono $k > 0$ e $l \neq 0$ tali che

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{(\varphi(x))^k} = l\,,$$

si dice che $f(x)$ è un *infinitesimo [infinito] di ordine $k > 0$ rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x)$.*

In altre parole, $f(x)$ è di ordine $k > 0$ rispetto a $\varphi(x)$ se esiste $k > 0$ tale che $f(x)$ è dello stesso ordine di $g(x) = (\varphi(x))^k$.

Osservazione (importante). La più semplice funzione infinitesima per $x \to 0$ è $\varphi(x) = x$. Per questo motivo tale funzione viene spesso considerata un riferimento per gli altri infinitesimi per $x \to 0$. Si usa dire infatti che $f(x)$ è un infinitesimo del primo ordine se è dello stesso ordine di x, che è del secondo se è dello stesso ordine di x^2, che è di ordine superiore al primo se è di ordine superiore ad x, e così via. Più in generale, se $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ si usa come infinitesimo campione $\varphi(x) = x - x_0$ e, se $x \to \pm\infty$, si prende $\varphi(x) = 1/x$. In maniera analoga, come infinito campione se $x \to \pm\infty$ si usa $\varphi(x) = x$, mentre se $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ si prende $\varphi(x) = 1/(x - x_0)$. Se k non è un numero naturale, si deve prestare attenzione al fatto che l'infinitesimo [infinito] campione $\varphi(x)$ dovrà essere > 0 affinché $(\varphi(x))^k$ sia definito. Ad esempio $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{1-x})$ è un infinitesimo di ordine $1/2$ per $x \to 1^-$, cioè rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = 1 - x$, ma non avrebbe senso considerare $\varphi(x) = x - 1$.

Esempio. Osserviamo che $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tang} x$ sono, per $x \to 0$, infinitesimi di ordine 1 rispetto a x, che $1 - \cos x$ è di ordine 2 rispetto a x; che $x - \sqrt{x^2 - 1}$, per $x \to +\infty$, è un infinitesimo di ordine 1 rispetto a $1/x$; che $\frac{x^2-x}{\sqrt{x-1}}$, per $x \to +\infty$, è un infinito di ordine $3/2$ rispetto a x.

Osservazione. Osserviamo che l'ordine di un infinitesimo [infinito] è unico. Non sempre però esiste l'ordine di un infinitesimo [infinito]. Ad esempio, usando il Teorema di de l'Hôpital, abbiamo provato che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty, \quad (a > 1),$$

qualunque sia $k > 0$. Si esprime questo fatto dicendo che a^x è un infinito di ordine superiore a qualunque $k > 0$. Lo stesso limite prova anche che a^{-x} è un infinitesimo per $x \to -\infty$ di ordine superiore a qualunque $k > 0$.

Abbiamo anche provato che

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}(|\log x|)^{\beta} = \lim_{x\to 0} \frac{(|\log x|)^{\beta}}{1/x^{\alpha}} = 0, \quad (\beta > 0),$$

qualunque sia $\alpha > 0$. Si esprime questo fatto dicendo che $(|\log x|)^{\beta}$ è un infinito (per $x \to 0$) di ordine inferiore a qualunque $\alpha > 0$.

Parte principale di un infinitesimo. Sia $f(x)$ un infinitesimo di ordine $k > 0$ rispetto a $\varphi(x)$ (per $x \to \alpha$). Perciò, esiste $l \neq 0$ tale che

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{(\varphi(x))^k} = l\,.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - l(\varphi(x))^k}{(\varphi(x))^k} = 0\,,$$

da cui la funzione

$$\epsilon(x) := \frac{f(x) - l(\varphi(x))^k}{(\varphi(x))^k}\,,$$

è infinitesima per $x \to \alpha$. Perciò, per x appartenente ad un intorno forato di α nel quale $\varphi(x) \neq 0$, si ha

$$f(x) = l\,(\varphi(x))^k + \epsilon(x)(\varphi(x))^k\,.$$

L'infinitesimo $l\,(\varphi(x))^k$ è detto la *parte principale di $f(x)$ (rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x)$)*. In particolare, se, per $x \to 0$, $f(x)$ un infinitesimo di ordine k rispetto a $\varphi(x) = x$ e se $l\,x^k$ è la sua parte principale, allora $f(x)$ e $g(x) = l\,x^k$ sono infinitesimi equivalenti.

Notazione. Siano f, g due infinitesimi per $x \to \alpha$. Se $f(x)$ è di ordine superiore a $g(x)$, cioè se $\lim_{x\to\alpha} f(x)/g(x) = 0$, si scrive $f(x) = o(g(x))$ e si legge "$f(x)$ è o-piccolo di $g(x)$ per x tendente ad α". Il simbolo *o-piccolo* è detto simbolo di Landau dal nome del matematico tedesco Edmund Georg Landau (1877-1938).

Esempio. L'infinitesimo $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ è, per $x \to 0$, di ordine superiore al primo in quanto $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x^2)/x = 0$. Si scrive $\operatorname{sen} x^2 = o(x)$. In maniera analoga, $1 - \cos x = o(x)$.

Con la notazione di Landau, potremo anche scrivere l'uguaglianza sopra nel modo seguente:

$$f(x) = l\,(\varphi(x))^k + o((\varphi(x))^k)\,.$$

Esempio. Abbiamo visto che $f(x) = \operatorname{sen} x$ è, per $x \to 0$, un infinitesimo di ordine 1 rispetto a x poiché $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ per $x \to 0$. Con la notazione di Landau introdotta sopra potremo raccogliere questa informazione nella seguente scrittura:

$$\operatorname{sen} x = x + o(x)\,.$$

In maniera analoga potremo scrivere

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\,.$$

Osserviamo inoltre che la parte principale (rispetto a x) di $f(x) = \operatorname{sen} x$ è $g(x) = x$, mentre quella di $f(x) = \cos x$ è $g(x) = (1/2)\,x^2$.

Esercizio. Determinare l'ordine di infinitesimo (per $x \to 0$) e la parte principale (rispetto a x) dei seguenti infinitesimi : $x\operatorname{sen}(2x)$, x^3, $x\cos(2x)$, $x^2 - x^3$, $2 - \sqrt{4-x}$.

Esercizio. Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to +\infty$ di

$$f(x) = \frac{2}{x^5 + \operatorname{arctang} x} + \frac{2+3x}{\sqrt{x^5}}$$

(prendere come infinitesimo campione $\varphi(x) = 1/x$).

Proposizione (Algebra degli o-piccoli). *Siano f e f_1 due infinitesimi per $x \to 0$. Sono di facile verifica le seguenti proprietà ($k, j > 0$):*

1. *se $f(x) = o(x^k)$, allora $x^j f(x) = o(x^{k+j})$;*
2. *se $f(x) = o(x^k)$, allora $cf(x) = o(cx^k) = o(x^k)$, $c \neq 0$;*
3. *se $f(x) = o(x^k)$ e $f_1(x) = o(x^j)$ allora $f(x)f_1(x) = o(x^{k+j})$;*
4. *se $f(x) = o(x^k)$ e $j < k$, allora $f(x) = o(x^j)$;*
5. *se $f(x) = o(x^k)$ e $f_1(x) = o(x^j)$ allora $f(x) \pm f_1(x) = o(x^h), h = \min\{k,j\}$;*
6. *se $f(x) = o(o(x^k))$, allora $f(x) = o(x^k)$;*
7. *se $f(x) = o(x^k + o(x^k))$, allora $f(x) = o(x^k)$.*

Dimostrazione. Proviamo la 3). Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)f_1(x)}{x^{k+j}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k} \lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{x^j} = 0.$$

Proviamo la 4). Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^j}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}\,\frac{x^k}{x^j}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}\,x^{k-j}=0$$

La dimostrazione delle altre proprietà è analoga e viene lasciata per esercizio. □

Esempio. Trovare l'ordine di infinitesimo per $x\to 0$ di $f(x)f_1(x)$ e di $f(x)/f_1(x)$ dove $f(x)=\operatorname{sen} x^2+x^3$ e $f_1(x)=1-\cos x+\sqrt[3]{x^2}$. Si ha

$$f(x)f_1(x)=(x^2+o(x^2)+x^3)((1/2)x^2+o(x^2)+\sqrt[3]{x^2})=$$

$$(x^2+o(x^2))(\sqrt[3]{x^2}+o(\sqrt[3]{x^2}))=x^{8/3}+o(x^{8/3})$$

e

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}=\frac{x^2+o(x^2)+x^3}{((1/2)x^2+o(x^2)+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$\frac{(x^2+o(x^2))}{(\sqrt[3]{x^2}+o(\sqrt[3]{x^2}))}=\frac{x^{2-2/3}(1+o(x^2)/x^2)}{1+o\left(\sqrt[3]{x^2}\right)/\sqrt[3]{x^2}}$$

Perciò $f(x)f_1(x)$ è, per $x\to 0$, un infinitesimo di ordine $8/3$ rispetto a x mentre $f(x)/f_1(x)$ è di ordine $4/3$.

Formula di Taylor

Abbiamo visto che, data $f\colon I\to\mathbb{R}$ definita in un intervallo aperto I e derivabile in un punto $x_0\in I$, esiste un unico polinomio di primo grado $P_1(h)=f(x_0)+f'(x_0)h$ tale che

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-P_1(h)}{h}=0.$$

In tal caso, potremo scrivere

$$f(x_0+h)=P_1(h)+\epsilon(h)h\,,$$

dove la funzione $\epsilon(h)$ è continua in zero e nulla in zero.

Proveremo che se f è derivabile n volte in x_0, esiste un unico polinomio $P_n(h)$ di grado $\leq n$ tale che

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-P_n(h)}{h^n}=0.$$

Ricordiamo che, dato $n\in\mathbb{N}\,,n\geq 1$, il numero $n\,!$ (si legge n *fattoriale*) è così definito

$$n\,!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

Esso denota cioè il prodotto di tutti i numeri naturali minori o uguali ad n. Pertanto $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$, ecc. È inoltre conveniente definire $0! = 1$ (ciò semplifica la scrittura di alcune formule). Si ha $n\,! = n \cdot (n-1)\,!$. Il numero $n\,!$ rappresenta il numero delle permutazioni (cioè degli ordinamenti) di n oggetti distinti assegnati.

Possiamo dunque enunciare il teorema seguente

Teorema (Esistenza della formula di Taylor). *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^n in un intervallo aperto I. Allora, fissato $x_0 \in I$, si ha*

$$f(x_0+h) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \epsilon(h)h^n,$$

dove la funzione $\epsilon(h)$ è continua in zero e nulla in zero e h è ammissibile (ossia, tale che $x_0 + h \in I$).

Dimostrazione. Definiamo

$$\epsilon(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+h) - \frac{f(x_0)}{0!} - \frac{f'(x_0)}{1!}h - \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n}{h^n}, & h \neq 0 \\ 0 & h = 0 \end{cases}$$

Vogliamo provare che $\epsilon(h) \to 0$ per $h \to 0$. È sufficiente verificare che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - \frac{f(x_0)}{0!} - \frac{f'(x_0)}{1!}h - \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n}{h^n} = 0$$

A questo scopo, applicando il teorema di de l'Hôpital, si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - \frac{f'(x_0)}{1!} - f''(x_0)h - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n-1!}h^{n-1}}{n\,h^{n-1}},$$

che è ancora una forma indeterminata $0/0$. Applicando altre $n-1$ volte il teorema di de l'Hôpital, siamo ricondotti a calcolare

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(x_0+h) - f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

che è uguale a 0 per la continuità di $f^{(n)}$ in x_0. $\square$

Il polinomio (di grado $\leq n$)

$$P_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

è detto *polinomio di Taylor di ordine* n *di* f *in* x_0 *(o di centro* x_0*).* L'espressione

$$f(x_0 + h) = P_n(h) + \epsilon(h)h^n$$

è detta *formula di Taylor di ordine* n *di* f *in* x_0 *(col resto nella forma di Peano).* La funzione $R_n(h) = \epsilon(h)h^n$ è chiamata *resto della formula.* Ovviamente si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_n(h)}{h^n} = 0\,,$$

cioè il resto della formula di Taylor è un infinitesimo di ordine superiore a n. Ricordando il simbolo di Landau, il resto $R_n(h)$ è $o(h^n)$ e la formula di Taylor si può scrivere anche nella forma

$$f(x_0 + h) = P_n(h) + o(h^n)\,.$$

La formula di Taylor di centro $x_0 = 0$ si dice anche *formula di MacLaurin.* In tal caso anche il polinomio e il resto si dicono di MacLaurin (oltre che di Taylor di centro zero).

Il polinomio di Taylor di f di ordine n è un polinomio di grado $\leq n$. Non è detto infatti che il suo grado sia esattamente n (a meno che $f^{(n)}(x_0)$ sia diversa da 0). Non si deve quindi confondere l'ordine di una formula di Taylor col grado del suo polinomio (che non deve superare l'ordine, ma può essere anche minore). In altre parole, l'ordine di una formula di Taylor si giudica dal suo resto, e non dal suo polinomio. Ad esempio, come vedremo facendo lo sviluppo di MacLaurin di $\operatorname{sen} x$, le uguaglianze

$$\operatorname{sen} x = x + o(x) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = x + o(x^2)$$

sono entrambe vere. La prima è la formula di MacLaurin di $\operatorname{sen} x$ del prim'ordine e la seconda è del second'ordine. Entrambe hanno lo stesso polinomio di MacLaurin, ma la seconda, ovviamente, dà più informazioni della prima. Ad esempio, ci dice che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0,$$

un fatto non deducibile dalla prima.

Osservazione. La parte principale di un infinitesimo per $x \to 0$ per il quale si possa scrivere la formula di MacLaurin è il monomio di grado minimo contenuto in tale formula.

N.B. la formula di Taylor di una funzione non è un'approssimazione della funzione, ma un'uguaglianza. Il polinomio di Taylor, invece, fornisce un'approssimazione della funzione in un intorno del centro (più piccolo è l'intorno e più elevato è il grado del polinomio, migliore è l'approssimazione).

Osservazione. Se $f\colon I \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in I$, allora risulta $f(x_0+h) = f(x_0) + \epsilon(h)$, e tale uguaglianza rappresenta la formula di Taylor di f di ordine zero in x_0.

Osservazione. La formula di Taylor di centro x_0 di $f(x)$ non è altro che la formula di MacLaurin della funzione $g(h) := f(x_0+h)$.

Esercizio. Scrivere la formula di Mac Laurin di ordine n delle funzioni $e^x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos x,\ \log(1+x),\ \arctan x$.

Esempio. Usando la formula di Taylor, calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}.$$

Poiché, per $x \to 0$, risulta $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3})}{x^3} = \frac{1}{6},$$

ricordando che, per definizione di o-piccolo, risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0.$$

Esempio. Usando la formula di Taylor, calcoliamo nuovamente

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Poiché, per $x \to 0$, risulta $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2})}{x^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Esercizio. Usando gli sviluppi di Taylor calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{(1 - \cos x)\log(1+x)}.$$

Teorema (Unicità della formula di Taylor). *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^n in un intervallo aperto I e sia $x_0 \in I$ e supponiamo che per ogni h ammissibile (ossia, tale che $x_0 + h \in I$) si abbia*

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + \epsilon(h) h^n\,,$$

dove
$$a_k \in \mathbb{R}\,,\; k = 0, \dots, n\,,$$
e la funzione $\epsilon(h)$ è continua in zero e nulla in zero. Allora
$$a_0 = f(x_0),\; a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\; a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,.$$

Dimostrazione. Il teorema di esistenza della formula di Taylor ci assicura che
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \epsilon(h)h^n,$$
per ogni h ammissibile. Quindi, sottraendo le due uguaglianze, si ha
$$0 = (a_0 - f(x_0)) + (a_1 - \frac{f'(x_0)}{1!})h + (a_2 - \frac{f''(x_0)}{2!})h^2 + \cdots + (a_n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!})h^n + \epsilon(h)h^n,$$
per ogni h ammissibile (osserviamo infatti che la differenza di due funzioni $\epsilon(h)$ è ancora una funzione del tipo $\epsilon(h)$). Dobbiamo dunque dimostrare che se
$$0 = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_n h^n + \epsilon(h)h^n\,, \quad \forall\, h \text{ tale che } x_0 + h \in I,$$
allora $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $\dots$, $c_n = 0$. Poiché tale uguaglianza è vera anche per $h = 0$ (ricordarsi che $x_0 \in I$, e quindi $h = 0$ è ammissibile), si ottiene $c_0 = 0$. Conseguentemente, cancellando c_0, si ha
$$0 = c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_n h^n + \epsilon(h)h^n, \quad \forall\, h \text{ tale che } x_0 + h \in I.$$
Pertanto, raccogliendo h, si ottiene
$$0 = h\,(c_1 + c_2 h + \cdots + c_n h^{n-1} + \epsilon(h)h^{n-1}), \quad \forall\, h \text{ tale che } x_0 + h \in I.$$
La funzione
$$c_1 + c_2 h + \cdots + c_n h^{n-1} + \epsilon(h)h^{n-1}$$
è dunque nulla per tutti gli $h \neq 0$ tali che $x_0 + h \in I$ e, di conseguenza, poiché è continua nel punto $h = 0$ (essendo somma e prodotto di funzioni continue), possiamo concludere che è nulla anche per $h = 0$ (altrimenti si avrebbe una contraddizione con il teorema della permanenza del segno per funzioni continue). Vale allora l'uguaglianza
$$0 = c_1 + c_2 h + \cdots + c_n h^{n-1} + \epsilon(h)h^{n-1}, \quad \forall\, h \text{ tale che } x_0 + h \in I.$$
Di conseguenza, ponendo $h = 0$, si deduce che anche il coefficiente c_1 deve essere nullo. Il risultato si ottiene procedendo allo stesso modo per passi successivi. □

Abbiamo visto che il teorema di esistenza della formula di Taylor è utile per trovare le formule di MacLaurin delle funzioni elementari (cioè quelle non esprimibili combinandone altre mediante operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione). Per le altre funzioni è più pratico procedere combinando tra loro le formule di MacLaurin delle funzioni elementari.

Esempio (di calcolo di una formula di MacLaurin di una funzione combinata). Calcoliamo la formula di MacLaurin di $f(x) = e^{x^2}$. Poiché, per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha

$$e^y = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!} + o(y^n)\,,$$

ponendo $y = x^2$ e tenendo conto dell'unicità della formula di Taylor, si ottiene

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} + o(x^{2n})\,.$$

Esempio (di calcolo di una formula di MacLaurin di una funzione combinata). Calcoliamo la formula di MacLaurin di $f(x) = \operatorname{sen} 2x$.

Ricordiamo che per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1!} + o(y^{2n+1})\,.$$

Poiché tale uguaglianza è valida per ogni numero y, sostituendo $2x$ al posto di y e tenendo conto della proprietà (2) dell'algebra degli o-piccoli, si ottiene

$$\operatorname{sen} 2x = 2x - \frac{4}{3}\,x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})\,.$$

Esempio (di calcolo di una formula di MacLaurin di una funzione combinata). Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 2x$ e determiniamone la formula di Mac Laurin del quinto ordine. Si dovrà scrivere un'uguaglianza del tipo $f(x) = P_5(x) + o(x^5)$, dove $P_5(x)$ è un polinomio di grado minore o uguale a cinque. Grazie alla presenza del termine x^2, è sufficiente determinare la formula di MacLaurin del terzo ordine di $\operatorname{sen} 2x$, e moltiplicarla poi per x^2. Si osservi infatti che il prodotto di x^2 per $P_3(x) + o(x^3)$, dove $P_3(x)$ è un polinomio di grado non superiore a tre, diventa $P_5(x) + o(x^5)$, dove $P_5(x)$ è di grado non superiore a cinque. Tenendo conto dell'esempio precedente si ha

$$\operatorname{sen} 2x = 2x - \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3)\,,$$

e quindi

$$f(x) = x^2(2x - \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3)) = 2x^3 - \frac{4}{3}\,x^5 + o(x^5)\,.$$

Esempio (di calcolo della derivata n-esima in un punto mediante la formula di Taylor). Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 2x$ dell'esempio precedente e determiniamo le sue derivate quarta e quinta nel punto $x_0 = 0$. Abbiamo già provato che $f(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}\,x^5 + \epsilon(x)x^5$. Il teorema di unicità della formula di Taylor ci assicura che $f^{(4)}(0)/4! = 0$ (infatti, nel polinomio di grado 5 trovato, non compare il termine con x^4) e che $f^{(5)}(0)/5! = -4/3$. Quindi $f^{(4)}(0) = 0$ e $f^{(5)}(0) = 5!(-4/3) = -160$.

Esempio (di calcolo di una formula di MacLaurin di una funzione combinata). Determiniamo la formula di MacLaurin dell'ottavo ordine della funzione

$$f(x) = 2x - x^3 \cos 2x + |x|x^8 e^{-x} \cos x\,.$$

Osserviamo che il termine $|x|x^8e^{-x}\cos x$ è della forma $\epsilon(x)x^8$, con $\epsilon(x) = |x|e^{-x}\cos x$. Quindi è sufficiente calcolare la formula di MacLaurin del quinto ordine di $\cos 2x$ (la moltiplicazione per x^3 produrrà infatti un resto del tipo $\epsilon(x)x^8$). Poiché l'uguaglianza

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \epsilon(x)x^5$$

è verificata per ogni numero x, sostituendo il numero $2x$ al posto di x si ottiene

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \epsilon(x)x^5.$$

In conclusione, si ha

$$f(x) = 2x - x^3 + 2x^5 - \frac{2}{3}x^7 + \epsilon(x)x^8.$$

Esercizio. Determinare la derivata quinta e la derivata sesta nel punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x)$ dell'esempio precedente.

Esercizio. Determinare la formula di MacLaurin del quinto ordine della funzione

$$f(x) = |x|x^5 \cos x - x^2 \operatorname{sen} 2x$$

e calcolare $f^{(5)}(0)$.

Esercizio. Usando gli sviluppi di Taylor calcolare il limite per $x \to 0$ delle seguenti funzioni

$$\frac{\log(1 + \operatorname{tang} x)}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad (1 + \operatorname{sen} 2x)^{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x - \operatorname{arctang} x}}\,.$$

10^a **settimana - dal 18.11.19**

Esercizio. Usando gli sviluppi di Taylor calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite per $x \to 0$ delle seguenti funzioni

$$\frac{e^{-\operatorname{sen} x^3} - 1 + x^3}{x^4 \log(\cos x) - x^6(\alpha + x)}\,, \qquad \frac{(\operatorname{sen} 3x - 3x)\log(1 + 2\operatorname{sen} x)}{\alpha x^3 e^x - x + \operatorname{sen} x}\,.$$

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = 3x + 7x^2 - x^4 + 5x^6 - x^9$. Vogliamo calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 5 di f. Poiché la funzione f è già essa stessa un polinomio, si ha $P_5(x) = 3x + 7x^2 - x^4$. Notiamo che P_5 è un polinomio di grado 4, cioè di grado minore di 5. In questo caso, infatti, risulta $f^{(5)}(0) = 0$.

Inoltre, essendo f un polinomio di grado 9, la formula di MacLaurin di f di ordine n con $n \geq 9$ è tale che $R_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, $P_n(x) = f(x)$ per $n \geq 9$.

Esercizio. Scrivere la formula di Taylor di ordine 4 e di centro $x_0 = 2$ del polinomio $f(x) = 2 + 4x^2 + 6x^3 - x^4$.

Esempio. Determiniamo ora una formula di Taylor con centro diverso da zero. Ad esempio, calcoliamo la formula del quarto ordine e centro $x_0 = -1$ di

$$f(x) = 2x + (x+1)^2 \cos \pi x$$

e calcoliamo $f^{(4)}(-1)$. Poiché il centro x_0 non è zero, conviene effettuare la sostituzione

$$x = x_0 + h = -1 + h\,.$$

In questo modo è come se si calcolasse la formula di Mac Laurin di $g(h) := f(-1+h)$. Si ha

$$g(h) = f(-1+h) = 2(-1+h) + h^2 \cos(\pi h - \pi) =$$

$$-2 + 2h + h^2 \cos(\pi - \pi h) = -2 + 2h - h^2 \cos(\pi h) =$$

$$-2 + 2h - h^2\Big(1 - \frac{\pi^2}{2}\, h^2 + o(h^2)\Big) = -2 + 2h - h^2 + \frac{\pi^2}{2}\, h^4 + o(h^4)\,.$$

Di conseguenza, la formula cercata è

$$f(x) = -2 + 2(x+1) - (x+1)^2 + \frac{\pi^2}{2}\,(x+1)^4 + o((x+1)^4)\,.$$

Supponiamo ora di voler calcolare la derivata quarta nel punto $x_0 = -1$ della funzione

$$f(x) = 2x + (x+1)^2 \cos \pi x.$$

Dato che di $f(x)$ abbiamo già determinato la formula di Taylor del quarto ordine in $x_0 = -1$, è sufficiente applicare il Teorema di unicità della formula di Taylor, il quale ci assicura che $f^{(4)}(-1)/4!$ coincide col coefficiente $\pi^2/2$ del monomio di quarto grado di tale formula. Pertanto

$$f^{(4)}(-1) = \frac{\pi^2}{2}\,4! = 12\pi^2.$$

Esempio. (di calcolo della derivata n-esima in un punto mediante la formula di Taylor). Calcoliamo la derivata quinta nel punto $x_0 = 2$ della funzione

$$f(x) = \frac{(2-x)^6 \cos x + (2-x)^5 x^2}{1+x^7}\,.$$

Allo scopo è sufficiente determinare la formula di Taylor di $f(x)$ del quinto ordine in $x_0 = 2$. Ponendo $x = 2 + h$ e sostituendolo nell'espressione di $f(x)$ si ottiene

$$f(2+h) = \frac{(-h)^6 \cos(2+h) + (-h)^5 (2+h)^2}{1+(2+h)^7}$$

$$= \epsilon(h)h^5 - h^5 \frac{(2+h)^2}{1+(2+h)^7} = \epsilon(h)h^5 - h^5(\frac{4}{129} + \epsilon(h)) = -\frac{4}{129}h^5 + \epsilon(h)h^5.$$

Quindi, per l'unicità della formula, risulta

$$f^{(5)}(2) = -\frac{4}{129}5! = -\frac{480}{129} = -\frac{160}{43} = -3,72093\ldots$$

Vogliamo ora applicare il teorema di esistenza della formula di Taylor per determinare la generica formula di MacLaurin di $(1+x)^\alpha$, detta *formula (di MacLaurin) binomiale.*

Definizione. Dato un numero reale α ed un numero naturale k, l'espressione

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

si chiama *coefficiente binomiale (generalizzato)* e si denota col simbolo

$$\binom{\alpha}{k}$$

che si legge "α su k" (da non confondere con il rapporto α/k).

Si verifica facilmente che il coefficiente di x^k nella formula di MacLaurin di $(1+x)^\alpha$ è proprio $\binom{\alpha}{k}$. Per poter scrivere la formula binomiale in modo sintetico (cioè utilizzando il simbolo di sommatoria) è conveniente definire "α su k" anche per $k = 0$, ponendo

$$\binom{\alpha}{0} = 1\,.$$

Si ha perciò

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)\,.$$

Nel caso particolare in cui α sia un numero naturale n e k sia un intero tra 0 e n (estremi inclusi), il coefficiente "n su k" è un numero naturale (verificarlo per esercizio) e compare nello sviluppo di $(a+b)^n$ (chiamato *Binomio di Newton*). I veri coefficienti binomiali (non generalizzati) sono proprio quelli che si riferiscono a questo caso speciale. Essi hanno anche un significato combinatorio, utile, tra l'altro, nel calcolo delle probabilità. Osserviamo inoltre che nel caso $\alpha = n \in \mathbb{N}$, il resto n-esimo è identicamente uguale a zero.

Esercizio. Scrivere l'espressione della formula di MacLaurin di ordine n di $f(x) = (1+x)^\alpha$ nei casi speciali in cui $\alpha = 1/2$ e $\alpha = -1$.

Esercizio. Dedurre, dall'esercizio precedente, la formula di MacLaurin di $f(x) = 1/(1-x)$.

Esercizio. Usando la formula di MacLaurin binomiale, determinare gli asintoti obliqui di $f(x) = \sqrt[5]{x^5 - 5x^4}$.

Esercizio. Un punto materiale di massa (a riposo) m si muove con velocità (scalare) v. La sua energia cinetica (relativistica) $T(v)$ è data dal prodotto dell'incremento di massa Δm dovuto al movimento per il quadrato della velocità della luce: $T(v) = \Delta m\, c^2 = (m(v) - m(0))\, c^2$. Sapendo che la massa in movimento del punto materiale è

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

si determini la formula di MacLaurin del secondo ordine di $T(v)$. Da detta formula si deduca che la parte principale di $T(v)$ è

$$\frac{1}{2} m v^2.$$

$\Big($**Sugg.** Scrivere la formula di MacLaurin di $T(v) = m\left((1 - \frac{v^2}{c^2})^{-(1/2)} - 1\right) c^2\Big)$

Uno degli scopi della formula di Taylor è quello di esprimere il valore di una funzione f in un punto x tramite informazioni riguardanti il suo comportamento in un punto iniziale x_0 (si osservi infatti il polinomio di Taylor dipende esclusivamente dai valori assunti da f e dalle sue derivate in x_0). In generale non sarà possibile valutare con esattezza il valore di f in x conoscendo soltanto ciò che accade in x_0. Tuttavia, in tale formula, tutto ciò che non riguarda il comportamento di f in x_0 è confinato in un solo termine: il resto della formula. Se nel valutare $f(x)$ si trascura il resto, si commette un errore, ma tale errore, talvolta, può essere maggiorato facilmente se si sa maggiorare il resto.

========================

Parte facoltativa (non svolta a lezione) Il teorema che segue fornisce una espressione del resto della formula di Taylor che in alcuni casi non è difficile maggiorare.

Teorema (Formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange). *Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^{n+1} in un intervallo I e sia $x_0 \in I$. Allora, esiste $\bar{x} \in (x_0, x)$ se $x_0 < x$ oppure $\bar{x} \in (x, x_0)$ se $x < x_0$, tale che*

$$R_n(x - x_0) = f^{(n+1)}(\bar{x})\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Osservazione. Per $n = 0$, la formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange non è altro che il teorema di Lagrange stesso.

Osservazione. Ponendo $h = x - x_0$, il resto della formula di Taylor nella forma di Lagrange si può esprimere anche nel modo seguente: esiste $\bar{h} \in (0, h)$ se $h > 0$ oppure $\bar{h} \in (h, 0)$ se $h < 0$ tale che

$$R_n(h) = f^{(n+1)}(\bar{h})\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Esempio. Calcolare $\operatorname{sen} 0,2$ con un errore inferiore a 10^{-3}.

Consideriamo lo sviluppo di $f(x) = \operatorname{sen} x$ con $x_0 = 0$ e $x = 0,2$. Si tratta di determinare n in modo tale che $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ risulti minore di 10^{-3}. Poiché $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ per ogni n e x, si ottiene, scrivendo $R_n(x)$ nella forma di Lagrange,

$$|R_n(0,2)| = \left| f^{(n+1)}(\bar{x})\frac{(0,2)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{(0,2)^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-3}$$

L'ultimo termine risulta minore di 10^{-3} pur di prendere $n \geq 3$. Perciò il numero $P_3(0,2) = 0,2 - (0,2)^3/6$ approssima $\operatorname{sen}(0,2)$ a meno di 10^{-3}.

Esercizio. Usando la formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange, approssimare $\log(0,8)$ con un errore inferiore a 10^{-3}.

Suggerimento. Scrivere lo sviluppo di $f(x) = \log(1 + x)$ con $x_0 = 0$ e $x = -0,2$ e osservare che

$$f^{(n+1)}(\bar{x}) = \frac{(-1)^{n+1} n\,!}{(1 + \bar{x})^{n+1}}.$$

Esercizio. Calcolare un valore approssimato del numero e (si sviluppi e^x e si calcoli per $x = 1$).

Suggerimento. La formula di MacLaurin di $f(x) = e^x$ con il resto nella forma di Lagrange è

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\bar{x}} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Calcolare tale formula per $x = 1$ e maggiorare

$$R_n(1) = e^{\bar{x}} \frac{1}{(n+1)!}$$

tenendo conto che un maggiorante di $e^{\bar{x}}$ è, ad esempio, il numero 3.

Esercizio. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile $n + 1$ volte e tale che $f^{(n+1)}(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Provare che f è un polinomio di grado minore o uguale ad n (in particolare, se $n = 0$, allora f è costante).

Suggerimento. Scrivere la formula di Mac Laurin di ordine n di f col resto di Lagrange.

Fine parte facoltativa

==============================

Integrali indefiniti

Definizione. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto o, più in generale, un'unione finita di intervalli aperti e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Si dice che una funzione derivabile $F\colon X \to \mathbb{R}$ è una *primitiva* di f se $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in X$.

È evidente che se $f(x)$ ammette una primitiva $F(x)$, allora ogni funzione della forma $F(x) + c$, dove c è una costante reale, è ancora una primitiva di $f(x)$. Ad esempio, ogni funzione del tipo $\log|x| + c$ è una primitiva di $1/x$, come si verifica facilmente derivando. Se f è definita in un **intervallo**, la proprietà precedente si può invertire. Più precisamente, si ha

Teorema. *Sia f una funzione definita in un intervallo e siano F e G due primitive di f. Allora la loro differenza è costante.*

Dimostrazione. Denotiamo con I l'intervallo in cui è definita f. La funzione differenza $H = G - F$ è tale che

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall\, x \in I.$$

Quindi, per un noto corollario del Teorema di Lagrange (valido per le funzioni definite in un intervallo), H è una funzione costante. □

Riassumendo, data una funzione $f(x)$ definita in un **intervallo** e data una sua primitiva $F(x)$, ogni altra primitiva di $f(x)$ si ottiene da $F(x)$ aggiungendo un'opportuna costante. Ossia, l'insieme delle primitive di $f(x)$ si esprime nella forma $F(x) + c$, con c costante arbitraria. Tuttavia, tale affermazione è falsa se viene rimossa l'ipotesi che il dominio di $f(x)$ sia un intervallo. Ad esempio, le due funzioni $F(x) = \log|x|$ e $G(x) = \log|x| + x/|x|$ hanno la stessa derivata $f(x) = 1/x$ ma ovviamente non differiscono per una costante (si osservi che infatti il loro dominio non è un intervallo: è $\mathbb{R}\backslash\{0\}$).

Definizione. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Col simbolo

$$\int f(x)\, dx\,,$$

detto *integrale indefinito* di $f(x)$ in dx, si denota l'insieme delle primitive di f.

Poiché il dominio di f è un intervallo, se F è una primitiva di f, si ha

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c\,,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è un'arbitraria costante. Se il dominio di una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ non è un intervallo (come nel caso di $f(x) = 1/x$), col simbolo

$$\int f(x)\, dx\,,$$

si intenderà l'insieme delle primitive della restrizione di f ad un qualunque sottointervallo del dominio e, di conseguenza, se F è una di queste primitive, sarà ancora valido scrivere

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\,.$$

Ad esempio, scriveremo

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c\,,$$

sottointendendo di avere scelto uno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ o $(0, +\infty)$ che compongono il dominio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ della funzione $f(x) = 1/x$. La scelta dipende dallo scopo che si vuole raggiungere (vedremo più avanti a cosa può servire il calcolo di una primitiva di una funzione).

Analogamente si ha

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tang} x + c\,,$$

sottintendendo di avere scelto uno degli infiniti intervalli che compongono il dominio della funzione integranda (o, equivalentemente, di $\operatorname{tang} x$).

Esempi di integrali indefiniti elementari:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)\,, \qquad \int x^{-1} dx = \log|x| + c\,,$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c\,, \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c\,, \qquad \int e^x\,dx = e^x + c\,,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctang} x + c\,, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c\,,$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + c\,, \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + c\,,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{settsenh} x + c = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + c\,,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{settcosh} x + c = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c\,.$$

Osservazione. L'integrale indefinito gode delle seguenti due proprietà:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx \ = \ \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,;$$

$$\int \lambda f(x)\,dx \;=\; \lambda\int f(x)\,dx \qquad (\text{dove } \lambda \in \mathbb{R})\,.$$

Presentiamo dei metodi per la ricerca delle primitive di alcune classi di funzioni continue.

Il primo metodo va sotto il nome di **integrazione per parti** ed è basato sulla formula di derivazione del prodotto.

Formula di integrazione per parti per l'integrale indefinito. *Siano f e g due funzioni di classe C^1 in un intervallo I. Allora gli integrali (indefiniti) delle funzioni $f(x)g'(x)$ e $g(x)f'(x)$ sono legati dalla seguente relazione:*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Dalla regola di derivazione del prodotto di funzioni si ha

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Quindi

$$\int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,dx = f(x)g(x) + c$$

Per l'additività dell'integrale indefinito, si ottiene

$$\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) + c$$

Inglobando la costante c nel primo integrale, si ha infine

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

□

Notazione (utile per il calcolo degli integrali). Data una funzione derivabile f, il prodotto $f'(x)\,dx$ della derivata di f (in x) per il simbolo dx si chiama *differenziale* di f (in x) e si denota col simbolo $df(x)$.

Ad esempio, in base a tale notazione, scrivere

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$$

oppure

$$-\int \operatorname{sen} x\; d\cos x$$

non fa alcuna differenza.

Osservazione. Con i differenziali, la formula di integrazione per parti può essere scritta nel modo seguente:

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)\,.$$

I termini $f(x)$ e $g(x)$ si chiamano *fattori finiti*, mentre $dg(x)$ e $df(x)$ sono i cosiddetti *fattori differenziali*.

Osservazione. Nella pratica, se dobbiamo calcolare un integrale del tipo

$$\int h(x)k(x)\,dx,$$

si può determinare una primitiva di una delle due funzioni $h(x)$ o $k(x)$, per esempio $H(x)$ primitiva di $h(x)$, e poi scrivere, nel caso in cui k sia di classe C^1,

$$\int h(x)k(x)\,dx = H(x)k(x) - \int H(x)k'(x)\,dx.$$

La scelta di integrare h e derivare k (o viceversa) è quella che rende i calcoli più semplici (sempre che entrambe le scelte siano possibili). In alcuni esempi si può avere $h(x) = 1$ e si sceglie $H(x) = x$.

Esempio (di uso della formula di integrazione per parti).

$$\int (x+1)e^x\,dx = (x+1)e^x - \int e^x\,dx = xe^x + c.$$

Esempio (di uso della formula di integrazione per parti). La funzione $\log x$ non sembra scritta in forma di prodotto, ma lo diventa se la pensiamo come $1 \cdot \log x$. Allora

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + c.$$

Se si preferisce, la forma differenziale $\log x\,dx$ è già scritta come prodotto di una funzione per il differenziale di un'altra: la prima funzione è $f(x) = \log x$ e la seconda è $g(x) = x$, il cui differenziale è ovviamente dx. Quindi

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\,d\log x = x\log x - \int dx = x\log x - x + c.$$

Esempio (di uso della formula di integrazione per parti).

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\int \operatorname{sen} x\,d\cos x = -\Big(\operatorname{sen} x\,\cos x - \int \cos x\,d\operatorname{sen} x\Big)$$

$$= -\operatorname{sen} x \, \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx = -\operatorname{sen} x \, \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx.$$

Quindi

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + c.$$

Esercizio. I seguenti integrali indefiniti si possono calcolare usando il metodo di integrazione per parti:

$$\int x^2 e^x \, dx \,, \quad \int x \operatorname{sen} x \, dx \,, \quad \int e^x \cos x \, dx \,,$$

$$\int x \log x \, dx \,, \quad \int \cos^2 x \, dx \,.$$

È utile, nella ricerca della primitiva di una funzione, imparare a riconoscere quando la funzione integranda è la derivata di una funzione composta (o, equivalentemente, quando la forma differenziale integranda è il differenziale di una funzione composta).

Esempio. Studiamo

$$\int \frac{x}{x^2+1} \, dx \,.$$

Ponendo $h(x) = x^2 + 1$, si ha

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \frac{h'(x)}{h(x)}$$

oppure, se si preferisce,

$$\frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{h(x)} dh(x) = \frac{1}{2} \, d \log |h(x)|.$$

Si ottiene quindi

$$\int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{h'(x)}{h(x)} \, dx = \frac{1}{2} \log |h(x)| + c =$$

$$\frac{1}{2} \log(x^2+1) + c = \log \sqrt{x^2+1} + c$$

oppure, se si preferisce,

$$\int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int d \log(x^2+1) = \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c.$$

Esempio. Consideriamo
$$\int \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx\,.$$
Ponendo $h(x) = x^2 + 1$ si vede che
$$\frac{3x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{2}\frac{h'(x)}{(h(x))^2}.$$
Da cui
$$\int \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{3}{2}\frac{dh(x)}{(h(x))^2} = -\frac{3}{2}\frac{1}{h(x)} + c = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1} + c$$
oppure, se si vuole,
$$\int \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int (x^2+1)^{-2}d(x^2+1) = -\frac{3}{2}\,(x^2+1)^{-1} + c.$$

Esempio. Consideriamo
$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx.$$
Si ha
$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = -\int (\cos x)^{-2} d\cos x = \frac{1}{\cos x} + c.$$
In maniera analoga si procede per calcolare
$$\int \operatorname{tang} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx.$$

Gli esempi appena descritti sono casi particolari di un metodo per la ricerca delle primitive detto **integrazione per sostituzione**. Tale metodo è basato sulla formula di derivazione della funzione composta.

Formula di integrazione per sostituzione (o di cambiamento di variabili) per gli integrali indefiniti. *Sia f una funzione continua definita su un intervallo I e sia $\varphi\colon J \to I$ una funzione di classe C^1 in un intervallo J, a valori nel dominio I di f. Allora, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, la funzione $G(t) = F(\varphi(t))$ è una primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Vale quindi la relazione*
$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \quad (\textit{modulo } x = \varphi(t)),$$
il cui significato è il seguente: ogni funzione del secondo insieme si ottiene da una del primo con la sostituzione $x = \varphi(t)$.

Dimostrazione. Data una primitiva F di f, per il teorema di derivazione di una funzione composta si ha

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,.$$

Pertanto $F(\varphi(t))$ è una primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. $\square$

Nella formula di integrazione per sostituzione il termine $\varphi'(t)\,dt$ rappresenta il differenziale di $\varphi(t)$. Si potrà quindi scrivere

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) \quad (\text{modulo } x = \varphi(t)),$$

mettendo così in risalto come si possa ricondurre il calcolo di un integrale del secondo tipo ad uno del primo: in pratica, per calcolare il secondo integrale, basta trovare una primitiva $F(x)$ di $f(x)$ e sostituire poi $\varphi(t)$ al posto della variabile x, e per far ciò l'invertibilità di φ non è necessaria. Più problematico è invece il calcolo di un integrale del primo tipo riconducendolo ad uno del secondo. Il motivo è che, dopo aver effettuato la sostituzione $x = \varphi(t)$ ed aver calcolato una primitiva $G(t)$ di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, per trovarne una di $f(x)$ occorre ricavare t in funzione di x dalla relazione $x = \varphi(t)$ (che costituisce l'equazione del grafico di φ). Ciò è possibile (almeno teoricamente) se si suppone $\varphi\colon J \to I$ strettamente monotona e suriettiva.

Esempio (di calcolo di un integrale del secondo tipo riconducendolo ad uno del primo). Calcoliamo l'integrale

$$\int t\cos(t^2)\,dt\,.$$

In base alla formula di integrazione per sostituzione con $x = \varphi(t) = t^2$, risulta

$$\frac{1}{2}\int 2t\cos(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int \cos x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + c \quad (\text{modulo } x = t^2)\,.$$

Di conseguenza

$$\int t\cos(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t^2) + c\,,$$

com'è facile verificare derivando il secondo membro.

Ovviamente, la scelta della lettera per indicare la variabile indipendente è solo una questione di forma, non di sostanza. Quindi anche l'integrale

$$\int x\cos(x^2)\,dx$$

si calcola nel seguente modo:

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)\,d(x^2) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(x^2) + c\,.$$

Esempio (di calcolo di un integrale del secondo tipo riconducendolo ad uno del primo). Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{1}{t\,\log t}\,dt\,.$$

In base alla formula di integrazione per sostituzione con $x = \varphi(t) = \log t$, risulta

$$\int \frac{1}{\log t}\,d\log t = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c \quad (\text{modulo } x = \log t)\,.$$

Perciò

$$\int \frac{1}{t\,\log t}\,dt = \log(|\log t|) + c\,.$$

Esempio (di calcolo di un integrale del secondo tipo riconducendolo ad uno del primo). Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{e^t}{e^t+1}\,dt$$

In base alla formula di integrazione per sostituzione con $x = \varphi(t) = e^t$, risulta

$$\int \frac{1}{e^t+1}\,de^t = \int \frac{1}{x+1}\,dx = \log|x+1| + c \quad (\text{modulo } x = e^t)\,.$$

Perciò

$$\int \frac{e^t}{e^t+1}\,dt = \log(e^t+1) + c\,.$$

Esempio (di calcolo di un integrale del primo tipo riconducendolo ad uno del secondo). Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

In base alla formula di integrazione per sostituzione, ponendo $t = e^x = \varphi^{-1}(x)$ (e, quindi, $x = \varphi(t) = \log t$), si ottiene

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \operatorname{arctang} t + c\,, \text{ (modulo } x = \log t)\,.$$

Perciò

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \operatorname{arctang} e^x + c\,.$$

Esempio (di calcolo di un integrale del primo tipo riconducendolo ad uno del secondo). Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx$$

Anche in questo caso, si tratta di trovare una sostituzione opportuna. Ponendo $t = \sqrt{x} = \varphi^{-1}(x)$ (e, quindi, $x = \varphi(t) = t^2$) e usando la formula di sostituzione si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx = \int \frac{2t}{t+1}\, dt = 2\Big(\int \frac{t+1-1}{t+1}\, dt = 2(\int \frac{t+1}{t+1}\, dt - \int \frac{1}{t+1}\, dt\Big)$$

$$= 2t - 2\log|t+1| + c\,, \text{ (modulo } x = t^2)\,.$$

Perciò

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx = 2\sqrt{x} - 2\log|\sqrt{x}+1| + c\,.$$

11^a **settimana - dal 25.11.19**

Integrazione delle funzioni razionali

Prendiamo ora in considerazione l'integrale indefinito di una funzione razionale, cioè di una funzione che è data dal quoziente di due polinomi.

Per semplicità, considereremo solo il caso in cui al denominatore compare un polinomio di grado ≤ 2.

Osservazione. Osserviamo che possiamo sempre ricondurci al caso in cui il grado del polinomio al numeratore sia minore del grado del polinomio al denominatore eventualmente eseguendo la divisione tra il polinomio al numeratore e quello al denominatore.

Supponiamo ad esempio di voler calcolare l'integrale indefinito della funzione razionale

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 + 1}\,.$$

Eseguendo la divisione si ottiene

$$x^3 + 2x + 5 = x(x^2 + 1) + x + 5.$$

Perciò

$$\int \frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 + 1}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{x + 5}{x^2 + 1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x + 5}{x^2 + 1}\,dx\,.$$

Ci si riconduce pertanto a calcolare

$$\int \frac{x + 5}{x^2 + 1}\,dx\,.$$

Si ha

$$\int \frac{x + 5}{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 + 1}\,dx + \int \frac{5}{x^2 + 1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\log(x^2 + 1) + 5\,\mathrm{arctang}\,x + c\,.$$

In base all'osservazione precedente siamo ricondotti a studiare il caso in cui al numeratore si abbia un polinomio di grado ≤ 1.

I casi significativi sono i seguenti:

$$\frac{A}{x + a} \qquad \frac{A}{(x + a)^2} \quad \text{e} \quad \frac{A}{x^2 + a^2}\,.$$

Si ha
$$\int \frac{A}{x+a}\,dx = A\log|x+a| + c\,,$$
$$\int \frac{A}{(x+a)^2}\,dx = \frac{-A}{x+a} + c\,,$$
$$\int \frac{A}{a^2+x^2}\,dx = \frac{A}{a}\operatorname{arctang}\frac{x}{a} + c\,.$$
I primi due sono immediati. Per quanto riguarda il terzo si ha
$$\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{(1+(x/a)^2)}\,.$$
e una primitiva di
$$\frac{1}{(1+(x/a)^2)}$$
è
$$a\arctan\frac{x}{a}.$$
Tutti gli altri casi sono riconducibili ai tre precedenti, come mostreremo negli esempi che seguono.

Esempio (denominatore con due radici reali e distinte).

Calcoliamo
$$\int \frac{x+3}{(x+2)(x+1)}\,dx.$$
Si ha
$$\frac{x+3}{(x+2)(x+1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x+1},$$
da cui,
$$x+3 = A_1(x+1) + A_2(x+2)\,.$$
Per il principio di identità dei polinomi, si ottiene
$$1 = A_1 + A_2\,, \quad 3 = A_1 + 2A_2\,,$$
da cui $A_1 = -1$ e $A_2 = 2$.

Di conseguenza,
$$\int \frac{x+3}{(x+2)(x+1)}\,dx = -\int \frac{1}{x+2}\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= -\log|x+2| + 2\log|x+1| + c\,.$$

Esempio (denominatore con due radici coincidenti).

Calcoliamo
$$\int \frac{x-1}{(x+3)^2}\,dx.$$
Si ha
$$\frac{x-1}{(x+3)^2} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{(x+3)^2}\,.$$
Procedendo come nell'esempio precedente si ottiene $A_1 = 1$ e $A_2 = -4$, da cui
$$\int \frac{x-1}{(x+3)^2}\,dx = \frac{1}{x+3} - 4\frac{1}{(x+3)^2} = \log|x+3| + 4\frac{1}{x+3} + c\,.$$
Osserviamo che in questo caso le costanti A_1 e A_2 si possono calcolare anche in maniera più rapida procedendo nel modo seguente:
$$\frac{x-1}{(x+3)^2} = \frac{x+3-3-1}{(x+3)^2} = \frac{x+3}{(x+3)^2} + \frac{-4}{(x+3)^2} = \frac{1}{x+3} - 4\frac{1}{(x+3)^2}\,.$$

Esempio (denominatore senza radici reali). Calcoliamo
$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$$
Poiché il discriminante del trinomio a denominatore è < 0, completando il quadrato si ottiene
$$x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4} = (x+\frac{1}{2})^2 + a^2\,,$$
dove $a = \sqrt{1-\frac{1}{4}}$. Perciò, operando la sostituzione $t = x + \frac{1}{2}$ (cioè $\varphi(t) = t - \frac{1}{2}$), si ottiene
$$\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4}}\,dx = \int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctang}\,\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + c\,.$$

Esempio (denominatore senza radici reali). Calcoliamo
$$\int \frac{x+2}{x^2-x+1}\,dx.$$

Rispetto all'esempio precedente, in questo caso il numeratore della funzione integranda è un polinomio di primo grado invece che di grado zero. È possibile però ricondursi al caso di sopra nel modo seguente:

$$\frac{x+2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\,,$$

da cui

$$\int \frac{x+2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2-x+1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + c\,.$$

Esercizio. Il seguente integrale si riconduce all'integrazione di una funzione razionale. Calcoliamo

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx.$$

Esprimendo $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ tramite $\operatorname{tang}(x/2)$ e operando la sostituzione $t = \operatorname{tang}(x/2)$) si ottiene

$$\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{2t+1-t^2}\,dt.$$

A questo punto si può procedere come negli esempi precedenti.

Esercizio. Si riconduce all'integrazione di una funzione razionale anche

$$\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}+e^x+3}\,dx.$$

Infatti, operando la sostituzione $x = \log t$, si ottiene

$$\int \frac{t^2-t}{t^2+t+3}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t\ -1}{t^2+t+3}\,dt.$$

Integrali definiti

Una *partizione* di un intervallo limitato e chiuso $[a, b]$ è un insieme finito

$$P = \{a_0, a_1, \dots a_n\}$$

di punti di $[a, b]$ con la seguente proprietà:

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b\,.$$

Gli intervalli

$$I_1 = [a_0, a_1], I_2 = [a_1, a_2], \dots, I_n = [a_{n-1}, a_n]$$

si dicono *intervalli (parziali) della partizione*. Una *scelta di punti* nella partizione P è un insieme finito $S = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ di punti di $[a, b]$ tali che

$$x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2,\ \dots, x_n \in I_n\,.$$

Una coppia $\alpha = (P, S)$ costituita da una partizione P di $[a, b]$ e da una scelta S di punti in P si dice una *partizione puntata*.

Sia ora assegnata una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Ad ogni partizione puntata $\alpha = (P, S)$ di $[a, b]$ possiamo associare il numero

$$\Sigma(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(\Delta x)_i\,,$$

dove $(\Delta x)_i = a_i - a_{i-1}$ denotano le ampiezze degli intervalli I_i della partizione P e x_i i punti della scelta S. Si ha così una funzione reale (di variabile **non reale**) $\Sigma\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ definita nell'insieme $\mathcal{P}$ delle partizioni puntate di $[a, b]$.

Intuitivamente l'integrale in $[a, b]$ della funzione f è, quando esiste, il valore limite che si ottiene facendo tendere a zero le ampiezze $(\Delta x)_i$ degli intervalli delle possibili partizioni puntate. Più precisamente si può dare la seguente definizione.

Definizione (di integrale definito non orientato). Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale definita in un intervallo limitato e chiuso (se f non è definita in alcuni punti di $[a, b]$, la estendiamo considerandola nulla in tali punti, purché questi siano un numero finito). Diremo che il numero l è l'*integrale di f in $[a, b]$* se, fissato un "errore" $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, comunque si assegni una partizione puntata α con intervalli parziali di ampiezza minore di δ, la somma $\Sigma(\alpha)$ sopra definita dista da l meno di ϵ. In altre parole, denotando con $|\alpha|$ la massima ampiezza degli intervalli della partizione puntata α ($|\alpha|$ si legge "parametro di finezza di α"), l'integrale l di f in $[a, b]$ è il limite per $|\alpha| \to 0$ della sommatoria $\Sigma(\alpha)$. Si scrive

$$\lim_{|\alpha|\to 0} \Sigma(\alpha) = l$$

e, ripetiamo, significa che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|\alpha| < \delta$ allora $|\Sigma(\alpha) - l| < \epsilon$.

Diremo che la funzione f è *integrabile* (in $[a, b]$) secondo Cauchy-Riemann quando tale limite esiste finito (si può facilmente verificarne l'unicità). Esso si denota con uno dei seguenti simboli:

$$\int_{[a,b]} f, \quad \int_{[a,b]} f(x)\, dx\,,$$

il primo dei quali si legge "integrale in $[a, b]$ di f" e il secondo "integrale in $[a, b]$ di $f(x)$ in dx". La f si chiama "funzione integranda" e la variabile x che appare nella seconda delle due notazioni si dice "variabile di integrazione". Tale variabile, non intervenendo nella definizione di integrale, potrà anche essere omessa (come nella prima delle due notazioni) o essere indicata con una qualunque altra lettera. Ad esempio, l'integrale in $[a, b]$ di f si può scrivere anche

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt \quad \text{oppure} \quad \int_{[a,b]} f(s)\, ds\,.$$

Osservazione. Se una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ non è limitata, allora il

$$\lim_{|\alpha|\to 0} \Sigma(\alpha)\,,$$

ammesso che esista, non può essere finito e, di conseguenza, f non può essere integrabile. Infatti, fissata una qualunque partizione P di $[a, b]$ si può variare la scelta S in P in modo da rendere $|\Sigma(\alpha)|$ arbitrariamente grande (ciò implica che $|\Sigma(\alpha)|$ può essere grande quanto si vuole indipendentemente dal parametro di finezza di α).

Osservazione. Verifichiamo che l'integrale definito in $[a, b]$ della funzione costante $f(x) = c \in \mathbb{R}$ coincide con l'area del rettangolo di base $[a, b]$ e altezza c, cioè si ha

$$\int_{[a,b]} c\, dx = c(b - a)\,.$$

È sufficiente infatti osservare che, data una qualunque partizione puntata $\alpha = (P, S)$ di $[a, b]$, il numero

$$\Sigma(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} c(\Delta x)_i = c \sum_{i=1}^{n} (\Delta x)_i = c(b - a)\,,$$

non dipende dalla partizione α e coincide, quindi, con il limite di $\Sigma(\alpha)$ per $|\alpha| \to 0$. Tale osservazione verrà usata nella dimostrazione del Teorema della media per gli integrali.

Osservazione. Sia f una funzione integrabile in $[a, b]$ e sia $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ che differisce da f in un sol punto (o in un numero finito di punti). Allora si può provare che anche g è integrabile e

$$\int_{[a,b]} g(x)\, dx = \int_{[a,b]} f(x)\, dx\,.$$

I due teoremi che seguono sono facile conseguenza di teoremi per il calcolo dei limiti (la cui validità si può estendere anche al contesto delle funzioni reali di variabile non reale).

Teorema (proprietà di linearità dell'integrale definito). *Siano $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili e λ una costante. Allora si ha*

$$\int_{[a,b]} (f(x) + g(x))\, dx = \int_{[a,b]} f(x)\, dx + \int_{[a,b]} g(x)\, dx \quad \textit{(additività)},$$

$$\int_{[a,b]} \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_{[a,b]} f(x)\, dx \quad \textit{(omogeneità)}.$$

Teorema (proprietà di monotonia dell'integrale definito). *Siano $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili e tali che $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora*

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx \le \int_{[a,b]} g(x)\, dx\,.$$

Osservazione. Analogamente alla ben nota disuguaglianza che afferma che "il valore assoluto di una sommatoria è minore o uguale alla sommatoria dei valori assoluti", per l'integrale si ha

$$\left| \int_{[a,b]} f(x) dx \right| \le \int_{[a,b]} |f(x)| dx\,.$$

Infatti, essendo f integrabile, si può provare che anche $|f|$ lo è. Di conseguenza, è sufficiente considerare la disuguaglianza $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ e applicare la proprietà di monotonia degli integrali.

Definizione. Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ si dice *trascurabile*, o di *misura nulla*, se fissato un arbitrario $\epsilon > 0$ si può ricoprire X con una famiglia (al più) numerabile di intervalli aperti di lunghezza complessiva (intesa come serie delle lunghezze) minore o uguale ad ϵ.

Osservazione. Gli insiemi finiti sono trascurabili. Infatti, se si considerano n punti e si fissa $\epsilon > 0$, basta coprire ciascun punto con un intervallo di ampiezza ϵ/n. Anche gli insiemi numerabili (cioè quelli che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali) sono trascurabili. Infatti, se $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ è un insieme numerabile, allora, fissato ϵ, per ricoprire X con intervalli di ampiezza complessiva minore o uguale ad ϵ è sufficiente coprire il primo punto con un intervallo di ampiezza $\epsilon/2$, il secondo con un intervallo di ampiezza $\epsilon/4$, e così via dividendo per due, ad ogni passo, l'ampiezza del precedente intervallo. In base alla teoria delle serie geometriche (che vedremo in seguito), l'ampiezza totale di tali intervalli è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \frac{\epsilon/2}{1 - 1/2} = \epsilon.$$

In particolare, perciò, l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali essendo numerabile ha misura nulla.

Teorema (di integrabilità). *Una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile (secondo Cauchy-Riemann) in $[a,b]$ se e solo se è limitata e l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.*

Alcune conseguenze del teorema di integrabilità sono le seguenti:

1. la somma, il prodotto e la composizione di funzioni integrabili è ancora integrabile (il quoziente, invece, potrebbe essere una funzione non limitata, e quindi non integrabile);

2. una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua è integrabile in $[a,b]$ (infatti è limitata per il Teorema di Weierstrass, ed ha un insieme vuoto (quindi trascurabile) di punti di discontinuità);

3. più in generale, una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ che abbia un numero finito (o un'infinità numerabile) di punti di discontinuità, è integrabile, purché sia limitata (la limitatezza, questa volta, non è assicurata!);

4. una funzione monotona in un intervallo $[a,b]$ è integrabile (infatti è limitata ammettendo massimo e minimo agli estremi dell'intervallo $[a,b]$ e si potrebbe dimostrare che ha al massimo un'infinità numerabile di punti di discontinuità);

5. la funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

non è integrabile in $[a, b]$ (infatti è limitata ma, essendo discontinua in tutti i punti, l'insieme dei punti di discontinuità ha misura $b - a$, cioè ha misura positiva).

In pratica possiamo affermare che tutte le funzioni che uno studente di ingegneria può incontrare nello svolgere gli esercizi hanno un insieme trascurabile di punti di discontinuità. Il motivo è dovuto al fatto che ogni "ragionevole funzione" può essere ottenuta combinando (con un numero finito di operazioni di somma, prodotto, quoziente, composizione, restrizione ad un intervallo e inversione) le seguenti funzioni (dette *fondamentali*), che hanno un insieme trascurabile di punti di discontinuità (c è una costante):

$$c\,, \quad x\,, \quad \operatorname{sen} x\,, \quad \log x\,, \quad \operatorname{sign} x\,, \quad [x]\,.$$

Diremo che f è una *funzione dedotta* o *deducibile* se si può ottenere dalle precedenti funzioni fondamentali con un numero finito di operazioni di somma, prodotto, quoziente, composizione, restrizione ad un intervallo e inversione. Ecco alcuni esempi di funzioni dedotte:
1) $\cos x$ si ottiene componendo $x + \pi/2$ con $\operatorname{sen} x$ (ossia $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$);
2) $\operatorname{tang} x$ è il rapporto tra $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$;
3) $\operatorname{arctang} x$ si ottiene invertendo la restrizione di $\operatorname{tang} x$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$;
4) $|x| = x \operatorname{sign} x$;
5) il gradino di Heaviside $H(x) = (1 + \operatorname{sign} x)/2$;
6) la funzione $\max\{x, 0\} = x\,H(x) = (x + |x|)/2$;
7) $\exp x$ è l'inversa di $\log x$;
8) $a^x = \exp(x \log a)$;
9) x^2 è il prodotto di x per x;
10) $\sqrt{x}$ è l'inversa della restrizione di x^2 all'intervallo $[0, +\infty)$;
11) $\sqrt[3]{x}$ è l'inversa di x^3;
12) la mantissa di x, cioè la funzione $x \mapsto x - [x]$.

Teorema. *Ogni funzione dedotta ha un insieme trascurabile di punti di discontinuità.*

Tenendo conto del precedente risultato e del teorema di integrabilità, data una funzione dedotta f e dato un intervallo limitato e chiuso $[a, b]$, per controllare se

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx$$

rappresenta un numero, ossia se f è integrabile in $[a, b]$, è necessario (ed è anche sufficiente) verificare che f sia definita in $[a, b]$ tranne al più un numero finito di punti (possiamo infatti estenderla supponendo che valga zero nei punti in cui non è definita) e **che sia limitata** in tale intervallo.

Ad esempio
$$\int_{[0,2]} \frac{e^x}{x^2-9}\,dx \quad \text{e} \quad \int_{[-1,1]} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$
sono numeri reali (si calcolano con metodi numerici), mentre non lo sono
$$\int_{[2,4]} \frac{e^x}{x^2-9}\,dx \quad \text{e} \quad \int_{[-1,1]} \frac{\cos x}{x}\,dx\,.$$

Infatti
$$f(x) = \frac{e^x}{x^2-9}$$
è limitata in $[0,2]$ essendo ivi continua (ricordarsi del Teorema di Weierstrass), mentre non è limitata in $[2,4]$ in quanto
$$\lim_{x\to 3} \frac{e^x}{|x^2-9|} = +\infty\,.$$

La funzione
$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$
(supponendo di estenderla uguale a zero in $x=0$) è limitata in $[-1,1]$ essendo
$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|} \leq \frac{|x|}{|x|} = 1\,, \quad \forall x \in [-1,1].$$

Invece, la funzione
$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$
non è limitata in $[-1,1]$ e quindi non è integrabile in tale intervallo.

Definizione. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un intervallo I. Diremo che f è *localmente integrabile* in I se è integrabile in ogni sottointervallo chiuso e limitato di I.

Osservazione. In base al Teorema di integrabilità, le funzioni continue in un intervallo I sono localmente integrabili poiché in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I sono limitate (per il Teorema di Weierstrass) e l'insieme dei punti di discontinuità è trascurabile (essendo vuoto).

Definizione (di integrale orientato). Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ localmente integrabile in un intervallo I. Dati due arbitrari punti $a, b \in I$ (N.B. a non è necessariamente minore di b), si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x)\,dx & \text{se} \quad a < b; \\ 0 & \text{se} \quad a = b; \\ -\int_{[b,a]} f(x)\,dx & \text{se} \quad a > b. \end{cases}$$

Si osservi che quando $a > b$ il numero $\int_a^b f(x)\,dx$ non rappresenta l'integrale della funzione f nell'intervallo $[b, a]$, ma il suo opposto.

Dalla precedente definizione segue immediatamente

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

per ogni $a, b \in I$.

Vale la seguente proprietà:

Teorema (di additività rispetto all'intervallo). *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ localmente integrabile in un intervallo I. Allora, dati tre arbitrari punti $a, b, c \in I$, si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

12^a **settimana - dal 2.12.19**

Il teorema che segue verrà usato nella dimostrazione del Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Teorema (Teorema della media per gli integrali.) *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile. Allora la media di* f *in* $[a,b]$, *ossia*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,,$$

è un numero compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f *in* $[a,b]$. *In particolare, se* f *è continua, allora esiste un punto* $x_0 \in [a,b]$ *per il quale si ha*

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)\,.$$

Dimostrazione. Poiché f, essendo integrabile, è limitata, esistono finiti l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f in $[a,b]$. Indichiamoli con m e M rispettivamente. Si ha $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$ e, quindi, per la proprietà di monotonia dell'integrale,

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx.$$

D'altra parte, per una delle osservazione fatte dopo la definizione di integrale definito, si ha $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ e $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$, da cui

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Dividendo per $(b-a)$ si ottiene la tesi della prima parte del teorema. Se inoltre f è continua, la conclusione segue immediatamente dal Teorema dei valori intermedi. □

Osservazione. Nel caso in cui f sia continua e positiva in $[a,b]$, l'uguaglianza $\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$ ottenuta nel teorema precedente, significa che esiste un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che l'area della regione compresa tra il grafico di f in $[a,b]$ e l'asse delle ascisse (rappresentata dall'integrale definito di f in $[a,b]$) coincide con l'area del rettangolo di base $[a,b]$ e altezza $f(x_0)$.

Il seguente risultato mostra che ogni funzione continua su un intervallo ammette primitiva (anche se per calcolarla è spesso necessario ricorrere a metodi di integrazione numerica).

Teorema (fondamentale del calcolo integrale). *Sia f una funzione continua in un intervallo I e sia $a \in I$. Allora la funzione $F\colon I \to \mathbb{R}$ definita da*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è una primitiva di f (ossia, F è derivabile e per ogni $x \in I$ si ha

$$F'(x) = f(x)).$$

Dimostrazione. Sia $x \in I$ e consideriamo il rapporto incrementale della funzione F in x. Si ha

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Per il teorema della media integrale e poiché f è continua in I, esiste $x(h) \in [x, x+h]$ se $h > 0$ oppure $x(h) \in [x+h, x]$ se $h < 0$ tale che

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x(h))\,.$$

Passando al limite per $h \to 0$ si ha che $x(h) \to x$ e, tenendo nuovamente conto della continuità di f in x, si ottiene $f(x(h)) \to f(x)$, da cui

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x(h)) = f(x)\,.$$

Questo prova che F è derivabile in x e che $F'(x) = f(x)$. Essendo x un punto arbitrario dell'intervallo I, si ha la tesi. $\square$

La funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

che compare nell'enunciato del teorema precedente viene detta *funzione integrale (relativa al punto a)*. Ovviamente, dato un altro punto $a_1 \in I$, anche la funzione $F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f. Risulta inoltre che F_1 differisce da F per la costante $\int_{a_1}^a f(t)dt$. Si ha infatti

$$F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt = \int_{a_1}^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt = \int_{a_1}^a f(t)\,dt + F(x)\,.$$

Esempio. Una possibile definizione della *funzione logaritmo (naturale)* si può dare tramite una funzione integrale. Sia data la funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,.$$

Poiché un estremo di integrazione è positivo, in base al Teorema di integrabilità, affinché il precedente integrale abbia senso è necessario e sufficiente che anche l'altro estremo sia positivo. Quindi il dominio di F è la semiretta $(0, +\infty)$. Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, F è derivabile e $F'(x) = 1/x$. Perciò, avendo derivata positiva nel suo dominio (che è un intervallo), essa è strettamente crescente e quindi invertibile. La sua inversa è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ ed è detta *funzione esponenziale (naturale)*. La funzione logaritmo si indica con $\log x$, mentre la funzione esponenziale si indica con e^x o, anche, con $\exp x$. Ovviamente $F(1) = 0$; quindi, poiché F è strettamente crescente, risulta $F(x) < 0$ se $x \in (0, 1)$ e $F(x) > 0$ se $x > 1$. Si può inoltre provare che $F(x_1 x_2) = F(x_1) + F(x_2)$, che $F(e) = 1$ e che l'immagine di F (che è necessariamente un intervallo in base al Teorema dei valori intermedi essendo la funzione continua, dato che è derivabile) coincide con $\mathbb{R}$ (cioè F è suriettiva). Di conseguenza, il dominio della funzione esponenziale, che coincide (per definizione di funzione inversa) con l'immagine della funzione logaritmo, è $\mathbb{R}$.

Esercizio. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x (1 - \cos t) \log(1 + t)\, dt.$$
(*suggerimento*: usando il teorema di de l'Hôpital ci si riconduce al calcolo di
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x) \log(1 + x)}{4x^3}.)$$

Esempio. Proviamo che la funzione
$$\Phi(x) = \int_0^{-2x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + t^2}\, dt\,.$$
è definita e derivabile in $\mathbb{R}$ e calcoliamone la derivata.

Poiché la funzione $t \mapsto \operatorname{sen} t/(1 + t^2)$ è continua in $\mathbb{R}$, allora è localmente integrabile. Quindi il dominio di Φ è $\mathbb{R}$. Inoltre, $\Phi(x) = F(g(x))$, dove $g(x) = -2x^2$ e F è la funzione integrale
$$F(y) = \int_0^y \frac{\operatorname{sen} t}{1 + t^2}\, dt.$$
Pertanto Φ è derivabile come composizione di funzioni derivabili e, applicando la regola di derivazione della funzione composta, risulta $\Phi'(x) = F'(g(x))g'(x) = -4xF'(-2x^2)$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha
$$F'(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{1 + y^2},$$

da cui

$$\Phi'(x) = -4x\frac{\operatorname{sen}(-2x^2)}{1+(-2x^2)^2}.$$

Il legame tra il calcolo di un integrale definito e la ricerca delle primitive di una funzione data è espresso dalla seguente importante conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale:

Teorema (Formula fondamentale del calcolo integrale). *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua in un intervallo I. Se $G\colon I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f, allora, fissati $a, b \in I$, si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)\,.$$

Dimostrazione. Poichè G è una primitiva di f, come osservato precedentemente, essa differisce nell'intervallo I per una costante dalla funzione integrale F, che è un'altra primitiva di f. Perciò, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(x) - \int_a^x f(t)\,dt = c\,,\ \forall x \in I.$$

Ponendo, in particolare, $x = a$ si ottiene $G(a) = c$ essendo $\int_a^a f(t)dt = 0$. Di conseguenza, per ogni $x \in I$, si ha

$$\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a)$$

e, per $x = b$, si ottiene la tesi. □

Notazione. Data una funzione $G\colon I \to \mathbb{R}$ e due punti $a, b \in I$, col simbolo $[G(x)]_a^b$ si denota la differenza $G(b) - G(a)$. La formula fondamentale del calcolo integrale può essere quindi scritta nel seguente modo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b\,.$$

Osservazione. Dalla formula fondamentale (del calcolo integrale) si potrebbe impropriamente dedurre che se c è una funzione costante, allora $F(x) = cx$ è una primitiva di c e, quindi, fissati $a, b \in \mathbb{R}$, risulta

$$\int_a^b c\,dx = [cx]_a^b = c(b-a).$$

Tuttavia non è lecito utilizzare la formula fondamentale per provare l'uguaglianza precedente. Il motivo è il seguente: la formula fondamentale si deduce dal teorema fondamentale, che a sua volta fa uso del teorema della media, nella cui dimostrazione si utilizza proprio tale uguaglianza (riguardare la dimostrazione).

Osservazione. Come conseguenza della formula fondamentale del calcolo integrale si ottiene che se $f\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile con derivata continua in un intervallo I, allora, fissati $a, b \in I$, si ha

$$\int_a^b df(x) = \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\,.$$

La Formula fondamentale del calcolo integrale ci permette di dare una risposta (almeno teorica) al problema del calcolo degli integrali definiti. Se vogliamo calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ ed f è continua in $[a, b]$, possiamo tentare di ricavare una primitiva di f. Questa ricerca non è sempre facile; anzi, in molti casi si rivela assai complessa.

Esistono, come in parte abbiamo anche visto, tecniche per la determinazione di primitive per alcune funzioni continue, ma in molti casi il calcolo di $\int_a^b f(x)\,dx$ è affidato ad algoritmi numerici (ad esempio metodo dei rettangoli, dei trapezi, di Simpson) che forniscono approssimazioni del valore cercato.

Sebbene ogni funzione continua definita in un intervallo ammetta una primitiva (ce l'assicura il teorema fondamentale del calcolo integrale), dal punto di vista pratico ricavarla esplicitamente, in molti casi, è "praticamente impossibile". Ecco il senso di tale affermazione: *esistono (e sono molte) delle funzioni deducibili dalle sei funzioni fondamentali la cui primitiva non è una funzione deducibile (dalle sei funzioni fondamentali).* Ad esempio le funzioni e^{-x^2} e $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, pur essendo ovviamente deducibili, ammettono primitive non deducibili. La prima di esse è la cosiddetta *campana di Gauss* ed è di notevole importanza in Statistica e Calcolo delle Probabilità.

Concludiamo con un'osservazione che cerca di fare chiarezza sui legami fra integrazione e derivazione. Spesso lo studente si è fatto l'idea che l'integrale sia il contrario della derivata o viceversa. In matematica l'espressione "è il contrario di" vuol dire ben poco. È bene pensare che la teoria dell'integrazione nasce come tentativo di risolvere il problema del calcolo delle aree (ad esempio il metodo di Archimede per calcolare l'area del segmento di parabola è del III secolo a.C.), mentre la teoria della derivazione affronta il problema della determinazione delle tangenti e risale alla seconda metà del secolo XVII con i contributi fondamentali di Newton e Leibniz: sono perciò due problemi diversi tra loro e apparentemente non collegati.

Il legame che si instaura tra integrazione e derivazione è dovuto al Teorema fondamentale del calcolo integrale, perché, se f è continua in un intervallo, allora la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva della funzione integranda. Di conseguenza, come abbiamo visto, il calcolo di $\int_a^b f(x)\,dx$ è riconducibile a quello della differenza $G(b) - G(a)$, dove $G(x)$ è una qualsiasi primitiva di $f(x)$.

Esercizio. Scrivere esplicitamente la funzione

$$F(x) = \int_{-1}^{x} |2t-1|\,dt\,.$$

(*suggerimento*: per $x < 1/2$ il segmento di estremi -1 e x è tutto contenuto nella semiretta $(-\infty, 1/2)$, perciò si ha

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{x}(1-2t)\,dt & \text{se } x < 1/2 \\ \\ \int_{-1}^{1/2}(1-2t)\,dt + \int_{1/2}^{x}(2t-1)\,dt & \text{se } x \geq 1/2\,, \end{cases}$$

ecc.)

Scrivere poi la funzione

$$G(x) = \int_{1}^{x} |2t-1|\,dt$$

e confrontarla con $F(x)$.

Formula di integrazione per parti per gli integrali definiti. *Siano f e g due funzioni di classe C^1 in un intervallo I. Allora, fissati $a, b \in I$, vale la seguente formula:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Dimostrazione. (Facoltativa.) Posto

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)g'(t)\,dt - [f(t)g(t)]_a^x + \int_a^x g(t)f'(t)\,dt,$$

basta provare che $\varphi(b) = 0$. Questo segue immediatamente dal fatto che $\varphi(a) = 0$ e $\varphi'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$. $\square$

Esempio. Calcoliamo, usando il metodo di integrazione per parti, il seguente integrale:

$$\int_1^2 \log x \, dx \,.$$

Risulta

$$\int_1^2 \log x \, dx = \Big[(\log x)\, x\Big]_1^2 - \int_1^2 x \, d \log x = 2\log 2 - \int_1^2 dx = 2\log 2 - 1 \,.$$

Esempio. Calcoliamo, usando il metodo di integrazione per parti, il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \,.$$

Risulta

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, d \operatorname{sen} x = \Big[\cos x \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, d \cos x =$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx \; = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \, dx \,.$$

Perciò

$$2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \pi/2 \,,$$

da cui

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{4} \,.$$

Formula di integrazione per sostituzione (o di cambiamento di variabile) per gli integrali definiti. *Sia f una funzione continua definita su un intervallo I e sia $\varphi\colon J \to I$ una funzione di classe C^1 in un intervallo J, a valori nel dominio I di f (non occorre che φ sia monotona). Allora, fissati due punti α e β nell'intervallo J, si ha*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt \,.$$

Dimostrazione. (Facoltativa) Supponiamo $\alpha < \beta$ e consideriamo la funzione $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(s) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} f(x) \, dx - \int_\alpha^s f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt \,.$$

Occorre provare che $g(\beta) = 0$. Dalla definizione di $g(s)$ si ricava immediatamente $g(\alpha) = 0$. Derivando si ha

$$g'(s) = f(\varphi(s))\varphi'(s) - f(\varphi(s))\,\varphi'(s) = 0\,, \quad \forall\, s \in [\alpha, \beta].$$

Quindi g è costante e, conseguentemente, $g(\beta) = g(\alpha) = 0$. $\square$

Osservazione (utile per comprendere le ipotesi della formula di integrazione per sostituzione). Supponiamo che la composizione $f(\varphi(t))$ di due funzioni sia definita per ogni t appartenente ad un segmento di estremi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora, se φ è continua, la funzione $f(x)$ è necessariamente definita per ogni x appartenente al segmento di estremi $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\beta)$. Tale segmento, infatti, per il teorema dei valori intermedi, è contenuto nell'immagine tramite φ del segmento di estremi α e β, e tale immagine deve essere contenuta nel dominio di $f(x)$.

Esempio. Calcoliamo, usando il metodo di integrazione per sostituzione, il seguente integrale:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx\,.$$

Ponendo $x = \operatorname{sen} t = \varphi(t)$ si ottiene

$$\sqrt{1 - x^2} = |\cos t| \quad \text{e} \quad \varphi'(t) = \cos t\,.$$

Occorre trovare due punti, α e β, tali che $\varphi(\alpha) = 0$ e $\varphi(\beta) = 1$. Di punti α tali che $\operatorname{sen}\alpha = 0$ ce ne sono tanti (addirittura infiniti) e lo stesso vale per i punti β tali che $\operatorname{sen}\beta = 1$. Come si effettua allora la scelta dei punti? *Poiché nella nuova funzione integranda compare il valore assoluto di* $\cos t$, *è bene fare in modo che nell'intervallo di estremi α e β la funzione* $\cos t$ *non cambi segno, in modo da poter togliere il valore assoluto (eventualmente moltiplicando* $\cos t$ *per* -1*) senza essere costretti a spezzare l'integrale in più parti.* Scegliendo $\alpha = 0$ e $\beta = \pi/2$ e tenendo conto che $\cos t \geq 0$ per $t \in (0, \pi/2)$, si ottiene

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} |\cos t|\, \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{4}\,,$$

dove l'ultimo integrale è stato calcolato per parti in precedenza.

Esercizio. I seguenti integrali definiti si possono calcolare usando il metodo di integrazione per sostituzione:

$$\int_1^2 x^3 e^{x^2}\, dx \quad (\text{porre } x = \sqrt{t}), \qquad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad (\text{porre } x = a \operatorname{sen} t),$$

$$\int_1^2 \frac{\log^2 t}{t}\, dt \quad (\text{si ha } \varphi(t) = \log t).$$

Esercizio. Usando la formula di cambiamento di variabile per gli integrali definiti, provare i seguenti fatti:

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e *dispari* (cioè $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$). Allora, $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$
2. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e *pari* (cioè $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$). Allora, $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$
3. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e *periodica* di periodo $T > 0$ (cioè $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$). Allora, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha
$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

La teoria dell'integrazione svolta è utile per il calcolo dell'area di figure piane. Data $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e non negativa e posto

$$A = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\, 0 \leq y \leq f(x)\}\,,$$

chiameremo *area* di A il numero

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Più in generale, date due funzioni $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, possiamo calcolare l'area della regione T definita nel modo seguente

$$T = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

Si ha

$$\operatorname{area} T = \int_{a}^{b} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx\,.$$

Esempio. Ricordando che l'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio 1 è $x^2 + y^2 = 1$, l'area del cerchio di centro l'origine e raggio 1 è data dal doppio dell'area di $A = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. Si ha

$$\operatorname{area} A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\;dx\,.$$

Essendo la funzione integranda pari, dall'esercizio precedente si ottiene

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\; dx = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\; dx$$

e, come abbiamo già visto in precedenza, (usando ad esempio la formula di integrazione per sostituzione con $\varphi(t) = \operatorname{sen} t$), si verifica subito che

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\; dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

Esercizio. Calcolare l'area della regione $T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

Esempio. [Volume di un solido di rotazione]

L'integrale definito può essere usata anche per calcolare il *volume di un solido di rotazione*. Più precisamente, data una funzione continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, si può provare (usando le formule di riduzione per gli integrali tripli che faremo in seguito) che il volume V ottenuto dalla rotazione intorno all'asse delle ascisse dell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\, y = f(x)\}$ è dato da

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx\,.$$

Ad esempio, il volume del paraboloide ottenuto facendo ruotare il grafico di $f(x) = \sqrt{x}$ in $[0,1]$ è

$$V = \pi \int_0^1 x\, dx \;= \pi[x^2/2]_0^1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

In maniera analoga, facendo ruotare $f(x) = x$ intorno all'asse x nell'intervallo $[0,1]$ si ottiene il volume del cono circolare retto di altezza 1

$$V = \pi \int_0^1 x^2\, dx \;= \pi[x^3/3]_0^1 = \frac{\pi}{3}\,.$$

Integrali impropri

Ricordiamo che una funzione è *localmente integrabile* in un intervallo I se è integrabile in ogni sottointervallo chiuso e limitato di I. Ovviamente, le funzioni continue in I sono ivi localmente integrabili.

Prenderemo in esame i seguenti casi:

- $I = [a, +\infty)$ oppure $I = (-\infty, b]$
- $I = (a, b]$ oppure $I = [a, b)$

Consideriamo per primo il caso di funzioni definite in un intervallo **non limitato** $[a, +\infty)$.

Sia dunque $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Poiché l'intervallo $[a, +\infty)$ non è limitato, l'integrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

non ha senso secondo la definizione data in precedenza (si osservi infatti che ogni partizione dell'intervallo di integrazione non può avere parametro di finezza finito). Per questo motivo tale integrale si dice *improprio* e il suo valore (quando esiste, finito o infinito) si definisce nel modo seguente:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

In altre parole, l'integrale (improprio) tra a e $+\infty$ di f non è altro che il limite per $b \to +\infty$ della funzione integrale

$$b \mapsto F(b) := \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Se tale limite è finito, diremo che l'integrale è *convergente*, se vale $+\infty$ o $-\infty$ diremo che è *divergente* (a $+\infty$ o a $-\infty$, rispettivamente). Se il limite non esiste, l'integrale improprio si dirà *indeterminato*.

Esempio. Calcoliamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx\,.$$

Si ha

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctang} b = \frac{\pi}{2}\,.$$

Esempio. La funzione $f(x) = 1/x^\alpha$ ha integrale improprio convergente in $[a, +\infty)$, $a > 0$, se e solo se $\alpha > 1$. Si ha infatti

$$\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \log b - \log a & \text{se} \quad \alpha = 1 \\ \frac{b^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{se} \quad \alpha \neq 1\,. \end{cases}$$

Perciò

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}} & \text{se} \quad \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < \alpha \le 1\,. \end{cases}$$

Osservazione (utile per la dimostrazione del criterio del confronto). Sia $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Supponiamo $f(x) \ge 0$ per ogni $x \ge a$. Allora la funzione integrale che a $b \in [a,+\infty)$ associa

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

è crescente rispetto a b. Pertanto, per il teorema del limite per le funzioni monotone, il limite per $b \to +\infty$ della funzione integrale esiste e coincide con l'estremo superiore della funzione F in $[a,+\infty)$. Esso è quindi finito o $+\infty$. Di conseguenza, l'integrale di f in $[a,+\infty)$ converge o diverge a $+\infty$ e, quindi, *per funzioni non negative non può essere indeterminato.*

Come abbiamo osservato precedentemente, la ricerca di una primitiva di una funzione integrabile si rivela, in molti casi, assai complessa o addirittura impossibile. Perciò non sempre è possibile stabilire se un integrale improprio è convergente o meno calcolando direttamente la funzione integrale $b \mapsto F(b)$ e facendone il limite per $b \to +\infty$. Il risultato che segue è utile per stabilire il *carattere* di un integrale improprio.

Criterio del confronto (per gli integrali impropri su una semiretta destra). *Siano $f, g\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni localmente integrabili e tali che*

$$0 \le f(x) \le g(x)\,, \quad \forall x \ge a\,.$$

Allora, si ha

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx\,.$$

Pertanto, se converge l'integrale della funzione g (detta maggiorante), converge anche l'integrale della f (detta minorante), e se diverge l'integrale della f, diverge anche l'integrale della g.

Dimostrazione. Poiché f e g sono non negative, le due funzioni integrali

$$b \mapsto F(b) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{e} \quad b \mapsto G(b) = \int_a^b g(x)\,dx$$

sono crescenti rispetto a b. Di conseguenza, in base all'osservazione sopra, per entrambe esiste (finito o infinito) il limite per $b \to +\infty$. Dall'ipotesi "$f(x) \leq g(x)$ per $x \geq a$" e tenendo conto della proprietà di monotonia dell'integrale definito si ottiene $F(b) \leq G(b)$ per ogni $b \geq a$. A questo punto, dal teorema del confronto dei limiti, si ha

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx \leq \lim_{b\to+\infty} \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^{+\infty} g(x)\,dx,$$

da cui la tesi. □

Esempio. La funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$$

ha integrale improprio convergente in $[1, +\infty)$. Infatti basta osservare che la funzione integranda è positiva (condizione senza la quale il criterio del confronto non è applicabile) e che si ha

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Quindi, poiché l'integrale (tra 1 e $+\infty$) di $1/x^2$ è convergente, per il criterio del confronto risulta convergente anche l'integrale assegnato. In base alla disuguaglianza del criterio del confronto possiamo anche affermare che tale integrale improprio è un numero compreso tra 0 e 1.

Esercizio. Provare che

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1 - \cos x}$$

è convergente.

Esempio. Studiamo il carattere del seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \cos x}.$$

La funzione integranda è sicuramente positiva nell'intervallo di integrazione e quindi possiamo tentare di applicare il criterio del confronto. Il fatto che per valori grandi di x la funzione integranda sia "approssimativamente uguale" a $1/\sqrt{x}$ ci fa nascere il sospetto che l'integrale assegnato sia divergente (come lo è, infatti, l'integrale di $1/\sqrt{x}$). Proviamo a vedere se si può minorare la funzione integranda con una funzione il cui integrale sia divergente. Dato che (nell'intervallo di integrazione) $\sqrt{x} \geq 1$, risulta anche $\sqrt{x} \geq 1 \geq \cos x$. Quindi

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x} + \cos x} \quad (\forall\, x \geq 1)$$

e, di conseguenza, l'integrale assegnato è divergente.

13^a **settimana - dal 9.12.19**

Il criterio che segue si deduce facilmente dal criterio del confronto (per gli integrali impropri su una semiretta destra).

Criterio del confronto asintotico : caso generale. *Siano* $f, g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *due funzioni localmente integrabili e positive. Supponiamo che esista*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Si ha:

1. *se* $0 < \lambda < +\infty$, *l'integrale di* f *e l'integrale di* g *hanno lo stesso carattere (cioè sono entrambi convergenti o entrambi divergenti);*
2. *se* $\lambda = 0$ *e l'integrale di* g *converge, allora converge anche l'integrale di* f*;*
3. *se* $\lambda = +\infty$ *e l'integrale di* g *diverge, allora l'integrale di* f *diverge.*

Spesso come funzione "test" per applicare il criterio del confronto asintotico si considera $g(x) = 1/x^\alpha$. In tal caso, ricordando che $1/x^\alpha$ ha integrale convergente se e solo se $\alpha > 1$, il criterio del confronto asintotico assume la forma seguente:

Criterio del confronto asintotico : caso particolare in cui $g(x) = 1/x^\alpha$**.** *Sia* $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *localmente integrabile e positiva. Supponiamo che esistano* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *e* $\alpha > 0$ *tali che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\, x^\alpha = \lambda.$$

Si ha:

1. *se* $0 < \lambda < +\infty$, *l'integrale di* f *converge se e solo se* $\alpha > 1$*;*
2. *se* $\lambda = 0$ *e* $\alpha > 1$, *allora l'integrale di* f *converge;*
3. *se* $\lambda = +\infty$ *e* $\alpha \le 1$, *allora l'integrale di* f *diverge.*

Esempio. Confrontando con $g(x) = 1/x^2$, si può provare che gli integrali

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \operatorname{arctang} \frac{1}{x}\, dx\,, \quad \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) dx\,,$$

$$\int_2^{+\infty} (\operatorname{arctang} x^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^3 + x}\, dx\,, \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1}\, \frac{1}{\log x}\, dx$$

sono convergenti. Confrontando invece con $g(x) = 1/x$, si deduce che

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{1 - \cos\frac{1}{x}}\; dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\log(x^2+x+1)}{x} dx\,,$$

sono divergenti.

Esempio. Consideriamo l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Usando il criterio del confronto asintotico (ad esempio, confrontando con $g(x) = 1/x^2$), si prova che tale integrale è convergente. Come abbiamo già osservato, la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt,$$

(la cui funzione integranda e^{-t^2} è la famosa *campana di Gauss*) è un esempio di funzione non deducibile dalle sei funzioni fondamentali. Ricorrendo però a metodi di calcolo per gli integrali doppi si fa vedere che il valore dell'integrale improprio è $\sqrt{\pi}/2$, cioè che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}/2\,.$$

Pertanto, la funzione integrale

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2}\, dt\,,$$

detta *funzione degli errori* (*error-function* in inglese), ha la seguente proprietà:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{erf} x = 1\,.$$

La funzione degli errori è particolarmente utile in Statistica e Calcolo della Probabilità; il fatto che tenda a 1 è una proprietà importante perché, nel Calcolo delle Probabilità, il numero 1 rappresenta la certezza.

ll risultato che segue è importante per provare la convergenza (e mai la non convergenza) di integrali impropri di funzioni di segno non costante (si osservi che lo studio dell'integrale di una funzione negativa si riconduce a quello di una funzione positiva portando -1 fuori dall'integrale). Infatti, se la funzione f cambia segno infinite volte in $[a, +\infty)$, né il criterio del confronto né quello del confronto asintotico per gli integrali impropri si possono applicare. Si ha il seguente:

Criterio della convergenza assoluta (per gli integrali impropri su una semiretta destra). *Sia $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Se converge (in $[a, +\infty)$) l'integrale di $|f|$, allora converge anche l'integrale di f, e risulta*

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx\,.$$

Si osservi che la precedente disuguaglianza ha senso in virtù del fatto che l'integrale di f è convergente. In questo caso, infatti, tale integrale rappresenta un numero reale, e quindi ha senso il suo valore assoluto. Quando converge l'integrale di $|f|$ si dice che l'integrale di f è *assolutamente convergente*.

Esempio. La funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}$$

ha integrale assolutamente convergente in $[0, +\infty)$. Infatti, dal criterio del confronto, si deduce subito che la funzione

$$|f(x)| = \frac{|\cos x|}{1 + x^2}$$

ha integrale convergente.

Osservazione. Ci sono funzioni il cui integrale in $[a, +\infty)$ converge ma tali che l'integrale del valore assoluto diverge, cioè funzioni il cui integrale è convergente ma non assolutamente convergente. Ad esempio, si potrebbe dimostrare che $f(x) = \operatorname{sen} x/x$ ha integrale improprio convergente in $[1, +\infty)$, ma $|f(x)|$ ha integrale non convergente.

Analogamente a come si è definito l'integrale improprio su una semiretta destra, data una funzione localmente integrabile $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, il suo integrale improprio, che denoteremo col simbolo

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx\,,$$

è il limite per $a \to -\infty$ della funzione

$$F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

È evidente che per gli integrali impropri su una semiretta sinistra valgono ancora, con ovvie modifiche, i criteri del confronto, del confronto asintotico e della convergenza assoluta.

Prendiamo ora in esame il caso di una funzione definita in un intervallo **limitato** $(a, b]$.

Abbiamo visto che se una funzione è integrabile (secondo Cauchy-Riemann) in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, allora, dalla definizione, è necessariamente limitata in tale intervallo. Supponiamo ora che una funzione f sia definita in un intervallo (limitato ma non chiuso) $(a, b]$ e che in tale intervallo risulti localmente integrabile (ad esempio, f potrebbe essere continua in $(a, b]$, ma non definita in a). Il fatto che f possa non essere definita in a non costituisce un problema: è sempre possibile estenderla assegnandole un arbitrario valore $f(a)$ (ad esempio, si può porre $f(a) = 0$). Comunque, che si estenda o no, i casi sono due: o f è limitata o non lo è. Nel primo caso non ci sono problemi: si potrebbe dimostrare, infatti, che ogni sua estensione è integrabile e che l'integrale non dipende dal valore $f(a)$ scelto. Se invece f è non limitata, nessuna sua estensione ad $[a, b]$ potrà eliminare tale difetto (per fissare le idee si pensi ad una f continua in $(a, b]$ che tende all'infinito per $x \to a^+$). In questo secondo caso si usa dire che f ha una *singolarità* in a. L'integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

non ha senso secondo la teoria di Cauchy-Riemann e per questa ragione viene detto *improprio*. Tuttavia, usando il fatto che f è integrabile (nel senso di Cauchy-Riemann) in ogni sottointervallo chiuso e limitato di $(a, b]$, è possibile attribuirgli un significato. Il suo valore (quando esiste nei reali estesi) è così definito:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Se tale limite è finito, diremo che l'integrale (di f in $[a, b]$) è *convergente*, se vale $+\infty$ o $-\infty$ diremo che è *divergente* (a $+\infty$ o a $-\infty$, rispettivamente). Se il limite non esiste, l'integrale improprio si dirà *indeterminato*.

Analogamente, se una funzione f è localmente integrabile in $[a, b)$, ma non limitata, definiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx\,.$$

Come per il caso della singolarità in a, tale integrale potrà essere convergente, divergente o indeterminato.

Esempio. L'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,, \quad \alpha > 0,$$

converge se $0 < \alpha < 1$ e diverge se $\alpha \geq 1$.

Si ha infatti

$$\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} -\log c & \text{se} \quad \alpha = 1 \\ \frac{1-c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{se} \quad \alpha \neq 1\,. \end{cases}$$

Perciò

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c\to 0}\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)} & \text{se} \quad 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha \geq 1\,. \end{cases}$$

Più in generale, lo stesso risultato si ottiene per i seguenti integrali impropri:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}\,, \qquad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\,.$$

Può capitare anche che una funzione f sia integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $[a,b]\backslash\{x_0\}$ con $x_0 \in (a,b)$. Ad esempio, f potrebbe essere continua in $[a,b]\backslash\{x_0\}$ ma non definita in x_0. Se f è limitata, basta definirla in un modo qualunque nel punto x_0 e la nuova funzione risulterà integrabile secondo Cauchy-Riemann (e l'integrale risulterà indipendente dal valore assegnato in x_0). Se invece f non è limitata (ad esempio, se per $x \to x_0$ si ha $|f(x)| \to +\infty$), allora l'integrale tra a e b di f è improprio e si definisce riconducendosi ai casi precedentemente visti:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx\,,$$

purché non si abbia la forma indeterminata $\infty - \infty$.

Ovviamente si possono presentare casi di funzioni con più di una singolarità in $[a,b]$. Se queste sono in numero finito, è sufficiente spezzare l'integrale nella somma di integrali con singolarità in uno solo dei due estremi di integrazione, riconducendosi così ai due casi già trattati.

I criteri del confronto, del confronto asintotico, e della convergenza assoluta, con le opportune modifiche, valgono anche per gli integrali impropri in un intervallo limitato. A titolo di esempio, riportiamo gli enunciati del criterio del confronto e del confronto asintotico nel caso dell'intervallo $(a,b]$.

Criterio del confronto (per gli integrali impropri in $(a,b]$). *Siano $f,g\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni localmente integrabili e tali che*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)\,, \quad \forall x \in (a,b]\,.$$

Allora, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Pertanto, se converge l'integrale della funzione g (detta maggiorante), converge anche l'integrale della f (detta minorante), mentre se diverge l'integrale della f, diverge anche l'integrale della g.

Criterio del confronto asintotico: caso particolare in cui $g(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$.
Sia $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ localmente integrabile e positiva. Supponiamo che esistano $\lambda \in \mathbb{R}^*$ e $\alpha > 0$ tali che

$$\lim_{x\to a} f(x)\,(x-a)^\alpha = \lambda.$$

Si ha:

1. *se $0 < \lambda < +\infty$, l'integrale di f converge se e solo se $\alpha < 1$;*
2. *se $\lambda = 0$ e $\alpha < 1$, allora l'integrale di f converge;*
3. *se $\lambda = +\infty$ e $\alpha \geq 1$, allora l'integrale di f diverge.*

Esempio. Proviamo che

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$$

è convergente. Applichiamo il criterio del confronto asintotico confrontando $1/\sqrt{\operatorname{sen} x}$ con $1/\sqrt{x}$. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = 1\,.$$

Poiché

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

è convergente ($\alpha = 1/2$), anche l'integrale dato ha lo stesso carattere.

Esempio. Proviamo che

$$\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x(2-x)^{1/3}}\,dx$$

è convergente. Osserviamo che la funzione integranda non è definita né in 0 né in 2. Si ha però

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x(2-x)^{1/3}} = \frac{1}{2^{1/3}}$$

e quindi l'unica singolarità della funzione è in 2. Si può perciò procedere come nell'esempio precedente confrontando la funzione integranda con

$$g(x) = \frac{1}{(2-x)^{1/3}}.$$

Esercizio. Studiare il carattere del seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}\sqrt{1-x}}\, dx$$

(*Sugg.* Prendere in esame separatamente i due casi

$$\int_0^c \frac{1}{x^{2/3}\sqrt{1-x}}\, dx \quad \text{e} \quad \int_c^1 \frac{1}{x^{2/3}\sqrt{1-x}}\, dx$$

dove c è un qualunque punto dell'intervallo $(0,1)$).

Successioni numeriche

Definizione. Una *successione* in un insieme X è un'applicazione (o funzione) $f\colon \mathbb{N} \to X$. Se il codominio X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, la successione si dice reale (o di numeri reali).

Data una successione $f\colon \mathbb{N} \to X$, per motivi di tradizione e di semplicità, l'immagine di un generico $n \in \mathbb{N}$ si denota col simbolo a_n, invece che con $f(n)$. Il valore a_n associato ad n si chiama *termine n-esimo* della successione o elemento di indice n. I numeri naturali sono detti gli *indici* della successione.

Vari modi di indicare una successione $f\colon \mathbb{N} \to X$ sono:
- $f\colon \mathbb{N} \to X$ (è quello più corretto ma il meno usato);
- $a_1, a_2, ..., a_n$,... (elencando i termini);
- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (specificando che il dominio è $\mathbb{N}$) o anche $\{a_n\}$ (usato quando risulta chiaro dal contesto che rappresenta una successione).

Da ora in avanti, a meno che non sia diversamente specificato, ci occuperemo di successioni di numeri reali. In questo caso vale la convenzione che abbiamo adottato per le funzioni reali: *per semplicità, a meno che non sia detto esplicitamente, si assume che il codominio coincida con* $\mathbb{R}$.

Esempi di successioni reali:
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, , \frac{1}{n}, \dots$
- $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$
- $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

Alcune successioni sono definite in modo *ricorsivo*, cioè:
1) assegnando il primo termine (o i primi k-termini);
2) dando una legge per ricavare il termine $(n+1)$-esimo dai termini precedenti.

Un esempio di successione definita in modo ricorsivo è rappresentato dalla successione di Fibonacci (matematico pisano della prima metà del XIII secolo), dove sono assegnati i primi due termini, $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$, ed ogni altro termine è somma dei due precedenti, cioè $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Tale successione governa alcuni fenomeni naturali come, ad esempio, il numero dei discendenti dei conigli e il numero degli antenati delle api (nelle varie generazioni).

Un altro esempio di successione ricorsiva si ottiene ponendo $b_n = a_{n+1}/a_n$, dove $\{a_n\}$ è la successione di Fibonacci. Si ha $b_1 = 1$ e $b_{n+1} = 1+1/b_n$. Si può provare che tale successione ha come limite (vedere sotto per la definizione di limite) il numero $(1+\sqrt{5})/2$ che è detto *sezione aurea* e ha importanti applicazioni nell'architettura e nella pittura.

Osservazione. Attenzione a non fare confusione tra i *termini* della successione (che sono sempre infiniti: il primo, il secondo, il terzo, ecc.) e i *valori* assunti dalla successione che possono essere anche un numero finito. Ad esempio, la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ assume solo i valori 1 e -1 ma, ciascuno, infinite volte (il primo termine è -1, il secondo è 1, il terzo è -1, ..., l'n-esimo è $(-1)^n$, ...).

Definizione. Si dice che una successione $\{a_n\}$ *tende* (o *converge*) a $l \in \mathbb{R}$, e si scrive $a_n \to l$ (per $n \to +\infty$), se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice N (dipendente da ϵ) tale che per $n > N$ si ha $|a_n - l| < \epsilon$. Il numero l è detto il *limite* di $\{a_n\}$ e si scrive anche

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \quad \text{oppure} \quad \lim a_n = l.$$

La seconda notazione, particolarmente sintetica, è giustificata dal fatto che $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$ e quindi l'unica nozione di limite che ha senso per le successioni è per $n \to +\infty$. Osserviamo anche che nella definizione di limite affermare che "per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\underline{N \in \mathbb{N}}$ tale che per $n > N$ si abbia $|a_n - l| < \epsilon$" è equivalente a verificare che "per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\underline{N \in \mathbb{R}}$ tale che per $n > N$ si abbia $|a_n - l| < \epsilon$". In altre parole è sufficiente che la disuguaglianza $|a_n - l| < \epsilon$ sia soddisfatta per tutti gli indici n maggiori di un certo numero reale N che può anche non essere un intero positivo.

Definizione. Si dice che $\{a_n\}$ *tende* (o *diverge*) a $+\infty\,[-\infty]$ (si scrive $a_n \to +\infty\,[a_n \to -\infty]$) se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un indice N (dipendente da M) tale che per $n > N$ si ha $a_n > M\,[a_n < M]$.

Definizione. Una successione $\{a_n\}$ si dice *convergente* se ammette limite finito, *divergente* se il limite è $+\infty$ o $-\infty$ e *non regolare* quando non ammette limite.

Esempio. Verifichiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Dato $\epsilon > 0$, dobbiamo determinare $N \in \mathbb{N}$ tale che se $n > N$ si abbia

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \quad \text{o, equivalentemente,} \quad -\epsilon < \frac{1}{n} < \epsilon\,.$$

Ovviamente risulta $1/n > -\epsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed è sufficiente prendere $N = [1/\epsilon]$ perché se $n > N$ si abbia

$$\frac{1}{n} < \epsilon$$

(ricordiamo che $[1/\epsilon]$ denota la parte intera di $1/\epsilon$). Per quanto osservato sopra, se cerchiamo $N \in \mathbb{R}$ e non necessariamente $N \in \mathbb{N}$, sarà sufficiente prendere $N = 1/\epsilon$, senza ricorrere alla parte intera di tale numero.

Esercizio. Verificare, mediante la definizione di limite, che

$$\frac{n}{n+1} \to 1\,.$$

Svolgimento. Fissiamo $\epsilon > 0$. Occorre provare che esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > N \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon\,.$$

La disequazione è equivalente alla coppia di disequazioni

$$-\epsilon < \frac{n}{n+1} - 1 < \epsilon.$$

La disuguaglianza $\frac{n}{n+1} - 1 < \epsilon$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ in quanto il primo membro è negativo, mentre $-\epsilon < -\frac{1}{n+1}$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ che sia maggiore di $\frac{1}{\epsilon} - 1$.

Esercizio. Verificare, usando la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2n+1}{2n^3-4} = \frac{1}{2}\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 + n = +\infty\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} -n^2 + n = -\infty\,.$$

Esercizio. Provare che la successione $\{(-1)^n\}$ è non regolare.

Teorema. (Unicità del limite). *Il limite di una successione, se esiste (finito o infinito), è unico.*

I concetti di funzione limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata sono già stati definiti per arbitrarie funzioni a valori reali. Essi rimangono pertanto validi anche per le successioni reali, essendo queste delle particolari funzioni a valori reali (l'unica distinzione riguarda il dominio, non il codominio). Ad esempio, diremo che la successione $\{a_n\}$ è *limitata* se esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Teorema. *Ogni successione convergente è limitata.*

Osservazione. Esistono successioni limitate ma non convergenti. Ad esempio, la successione $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$.

Definizione. Diremo che una successione $\{a_n\}$ soddisfa una certa proprietà $\mathcal{P}$ *definitivamente* se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che i termini a_n soddisfano $\mathcal{P}$ per ogni $n > N$.

In altre parole, se $\{a_n\}$ soddisfa $\mathcal{P}$ definitivamente significa che i termini della successione per i quali $\mathcal{P}$ può non essere soddisfatta sono in numero **finito**.

Esempio. La successione di termine n-esimo

$$a_n = \frac{n-7}{n+3}$$

è definitivamente positiva essendo $a_n > 0$ per ogni $n > 7$.

Esempio. Una successione $\{a_n\}$ converge ad l se per ogni $\epsilon > 0$ si ha $|a_n - l| < \epsilon$ definitivamente.

I risultati che seguono sono stati già enunciati nel contesto delle proprietà dei limiti di funzioni reali di variabile reale. Per completezza li riportiamo interpretandoli nell'ambito delle successioni.

Teorema. (Permanenza del segno per le successioni). *Sia $\{a_n\}$ una successione reale. Se a_n tende ad un limite maggiore di 0 (anche $+\infty$), allora $a_n > 0$ definitivamente (cioè esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n > N$).*

Dimostrazione. Supponiamo che il limite l della successione $\{a_n\}$ sia finito e positivo. Fissato $\epsilon = l/2$, dalla definizione di limite si deduce che $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$ definitivamente. Quindi, essendo $l - \epsilon = l - l/2 = l/2 > 0$, si ottiene $0 < a_n$ definitivamente. Analizziamo ora il caso in cui il limite sia $+\infty$. Fissato un qualunque $M > 0$, si ha (sempre per la definizione di limite) $a_n > M$ definitivamente e quindi, a maggior ragione, $a_n > 0$ definitivamente. $\square$

Teorema. (Operazioni sui limiti per le successioni). *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $a_n \to \lambda$ e $b_n \to \mu$, dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$. Allora, quando ha senso nei reali estesi (cioè tranne i casi $\infty - \infty$, $0/0$, $0 \cdot \infty$ e ∞/∞), si ha:*

1) $a_n + b_n \to \lambda + \mu\,;$

2) $a_n b_n \to \lambda\mu\,;$

3) $a_n/b_n \to \lambda/\mu\,.$

Riportiamo alcuni esempi per mostrare come non sia conveniente dare un senso, nei reali estesi, alle espressioni $\infty - \infty$, $0/0$, $0 \cdot \infty$ e ∞/∞ (dette *forme indeterminate*):

$$\begin{aligned}
(\infty - \infty) &\quad (n+1) - n \to 1 \\
(\infty - \infty) &\quad n^2 - n \to +\infty \\
(0 \cdot \infty) &\quad (1/n)n \to 1 \\
(0 \cdot \infty) &\quad (1/n)n^2 \to +\infty \\
(0/0) &\quad (1/n)/(1/n) \to 1 \\
(0/0) &\quad (1/n^2)/(1/n) \to 0 \\
(\infty/\infty) &\quad n/n \to 1 \\
(\infty/\infty) &\quad n^2/n \to +\infty
\end{aligned}$$

Esercizio. Usando il teorema precedente, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{6n^2+3n}\,; \qquad \lim_{n\to\infty} n - \sqrt{n^2+1}\,.$$

Il risultato che segue è una facile conseguenza del teorema della permanenza del segno.

Teorema (del confronto dei limiti per le successioni). *Se $a_n \to l \in \mathbb{R}$, $b_n \to m \in \mathbb{R}$ e $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora $l \leq m$.*

Dimostrazione. Se, per assurdo, l fosse maggiore di m, la successione $\{a_n - b_n\}$ tenderebbe al numero positivo $l - m$. Di conseguenza, per il teorema della permanenza del segno, risulterebbe $a_n - b_n > 0$ definitivamente, in contrasto con l'ipotesi "$a_n \leq b_n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$". $\square$

Un caso particolare del Teorema del confronto dei limiti per le successioni è il seguente corollario.

Corollario. *Se $\{a_n\}$ è una successione reale a termini non negativi (rispettivamente non positivi) convergente ad l, allora risulta $l \geq 0$ (risp. $l \leq 0$).*

Teorema (dei carabinieri per le successioni). *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni tali che*

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Se $a_n \to l \in \mathbb{R}$ e $c_n \to l \in \mathbb{R}$, allora anche $b_n \to l$.

Dimostrazione. Fissiamo un $\epsilon > 0$. Poiché $a_n \to l$, esiste un n_1 tale che $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$ per tutti gli $n > n_1$. Per lo stesso ϵ è possibile determinare un n_2 tale che $l - \epsilon < c_n < l + \epsilon$ per $n > n_2$. Quindi, se $n > N := \max\{n_1, n_2\}$, allora $l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon$, da cui si ottiene $l - \epsilon < b_n < l + \epsilon$ per tutti gli $n > N$. □

Osservazione. Osserviamo che il teorema dei carabinieri è ancora valido se si suppone che la condizione $a_n \leq b_n \leq c_n$ (ferme restando le altre ipotesi) valga definitivamente (non occorre sia vera per ogni $n \in \mathbb{N}$). L'importante è che i carabinieri $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ prima o poi catturino $\{b_n\}$ e si dirigano entrambi dalla stessa parte.

Esempio. La successione

$$\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\}$$

è rapporto di due successioni: $\{\operatorname{sen} n\}$ e $\{n\}$. Il suo limite non si può determinare applicando il Teorema sulle operazioni dei limiti perché la successione $\{\operatorname{sen} n\}$ non ha limite per $n \to \infty$ (cosa che noi non dimostreremo). D'altra parte si ha

$$-\frac{1}{n} \;\leq\; \frac{\operatorname{sen} n}{n} \;\leq\; \frac{1}{n}\,,$$

e quindi dal Teorema dei carabinieri si deduce

$$\frac{\operatorname{sen} n}{n} \to 0\,.$$

Definizione. Una successione si dice *infinitesima* se è convergente a zero.

E' immediato verificare che

Teorema. *La successione $\{a_n\}$ è infinitesima se e solo se la successione $\{|a_n|\}$ è infinitesima.*

Osservazione. Nella proposizione precedente non si può sostituire 0 con un valore $l \neq 0$. Infatti, ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ non ammette limite, ma $|a_n| = 1$ e quindi converge a 1. In generale, vale però la seguente implicazione:

$$a_n \to l \implies |a_n| \to |l|\,.$$

Il seguente teorema è utile in molte occasioni:

Teorema. *La successione prodotto di una successione limitata per una infinitesima è infinitesima.*

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}$ una successione limitata. Perciò esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia b_n tale che $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Si ha

$$0 \leq |a_n b_n| \leq M|b_n|,$$

da cui, per il Teorema dei carabinieri e per il teorema precedente, si deduce che $\{a_n b_n\}$ è infinitesima. $\square$

Esempio. Dal teorema precedente si deduce immediatamente che le successioni

$$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} \quad \text{e} \quad \left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n^2-n}\right\}$$

sono infinitesime.

Teorema (del carabiniere per le successioni). *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni tali che*

$$a_n \leq b_n \quad \textit{definitivamente.}$$

Se $a_n \to +\infty$ ($b_n \to -\infty$), allora anche $b_n \to +\infty$ ($a_n \to -\infty$).

Analogamente a ciò che si è visto per le funzioni, gli estremi inferiore e superiore di $\{a_n\}$ sono gli estremi inferiore e superiore dell'insieme dei valori assunti dalla successione e si denotano, rispettivamente, con

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad \text{e} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$

o più semplicemente con $\inf a_n$ e $\sup a_n$. Se una successione $\{a_n\}$ non è limitata superiormente [inferiormente] si pone

$$\sup a_n = +\infty \quad [\inf a_n = -\infty].$$

Osservazione. La seguente caratterizzazione per l'estremo superiore [estremo inferiore] di una successione è analoga a quella data per una funzione reale:

$\sup a_n = l \in \mathbb{R}$ *[*$\inf a_n = l \in \mathbb{R}$*] se e solo se*

1) $a_n \leq l$, $[a_n \geq l]$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

2) $\forall \epsilon > 0$ *esiste un indice n_ϵ tale che $a_{n_\epsilon} > l - \epsilon$ [$a_{n_\epsilon} < l + \epsilon$].*

Esercizio. Provare che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \left(\frac{n-2}{n+3}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \left(\frac{n-2}{n+3}\right) = -1\,.$$

Suggerimento. Per provare la prima delle due uguaglianze usiamo la caratterizzazione richiamata sopra. La 1) è verificata essendo ovviamente

$$(-1)^n \left(\frac{n-2}{n+3}\right) \leq 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per quanto riguarda la 2) si tratta di verificare che per ogni $\epsilon > 0$ è possibile determinare un indice n_ϵ tale che

$$(-1)^{n_\epsilon}\left(\frac{n_\epsilon - 2}{n_\epsilon + 3}\right) > 1 - \epsilon.$$

È sufficiente prendere come n_ϵ un n pari e tale che $n > (3(1-\epsilon)+2)/\epsilon$.

Definizione. Una successione $\{a_n\}$ si dice *crescente [decrescente]* se per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ si ha $a_m \leq a_n\,[a_m \geq a_n]$. Una successione $\{a_n\}$ si dice *strettamente crescente [strettamente decrescente]* se per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ si ha $a_m < a_n\,[a_m > a_n]$. Le successioni (strettamente) crescenti o (strettamente) decrescenti sono dette successioni *(strettamente) monotòne.*

Osservazione. È facile verificare che la definizione di successione monotona è equivalente alla seguente:

"$\{a_n\}$ si dice *crescente [decrescente]* se, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n \leq a_{n+1}\,[a_n \geq a_{n+1}]$."

Teorema. (Limite per successioni monotone). *Se $\{a_n\}$ è una successione monotona, allora ammette limite. Precisamente si ha $\lim a_n = \sup a_n$ se $\{a_n\}$ è crescente e $\lim a_n = \inf a_n$ se è decrescente. In particolare se $\{a_n\}$, oltre ad essere monotona, è anche limitata, allora è convergente, se invece non è limitata, è divergente.*

Dimostrazione. (Facoltativa) Assumiamo, per fissare le idee, che la successione $\{a_n\}$ sia crescente (il caso "$\{a_n\}$ decrescente" è analogo).

Supponiamo prima che l'estremo superiore di $\{a_n\}$ sia finito e denotiamolo, per brevità, con la lettera l. Fissiamo un arbitrario $\epsilon > 0$. Poiché (per definizione di estremo superiore) l è il minimo maggiorante per $\{a_n\}$, il numero $l - \epsilon$ non può essere un maggiorante per $\{a_n\}$. Non è vero quindi che tutti gli a_n verificano la condizione $a_n \leq l - \epsilon$. Ne esiste quindi (almeno) uno, denotiamolo $a_{\bar{n}}$, che non verifica tale condizione. Esiste cioè un indice $\bar{n}$ per il quale risulta $a_{\bar{n}} > l - \epsilon$ (proprietà (2) della caratterizzazione dell'estremo superiore). Dato che abbiamo supposto $\{a_n\}$ crescente, se n è un qualunque indice maggiore di $\bar{n}$, si ha $a_{\bar{n}} \leq a_n$ e quindi, a maggior ragione, $l - \epsilon < a_n$. D'altra parte l è un maggiorante per gli a_n e, di conseguenza, per ogni n (e non solo per quelli maggiori di $\bar{n}$) risulta $a_n \leq l$ (proprietà (1) della caratterizzazione dell'estremo superiore). In conclusione, possiamo affermare che per gli $n > \bar{n}$ si ha $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$, e quindi, per la definizione di limite, $a_n \to l = \sup a_n$.

Supponiamo ora $\sup a_n = +\infty$ e fissiamo un $M > 0$. Poiché (in base al significato della notazione $\sup a_n = +\infty$) la successione non è limitata superiormente, il numero M non può essere un maggiorante per tutti gli a_n. Esiste quindi un indice $\bar{n}$ per il quale risulta $a_{\bar{n}} > M$. Dato che la successione è crescente, quando $n > \bar{n}$ si ha $a_n > M$. Dunque, per la definizione di limite, $a_n \to +\infty = \sup a_n$. $\square$

Osservazione. La condizione espressa dal teorema precedente è ovviamente solo sufficiente. Ad esempio la successione $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^n}{n}\}$ è convergente (infatti tende a 0), ma non è monotona. Si ha $\sup a_n = \max a_n = 1/2$ e $\inf a_n = \min a_n = -1$.

Il seguente risultato mette in relazione il limite di successione e quello di funzione.

Teorema ("di collegamento"). *Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per X. Allora $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}^*$ se e solo se per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in X$, $a_n \neq \alpha$, $a_n \to \alpha$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lambda$.*

Usando il teorema di collegamento e i limiti di funzione provati in precedenza si ottiene immediatamente che:

se $\{a_n\}$ è una qualunque successione infinitesima, allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1.$$

Esempio. Usando il teorema di collegamento si può provare che non esiste il limite per $x \to +\infty$ di $\operatorname{sen} x$. Basta infatti considerare le successioni di termine n-esimo

$$a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi\ , \quad \overline{a}_n = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$$

e osservare che $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} a_n = 1$ mentre $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} \overline{a}_n = -1$.

14^a settimana - dal 16.12.19

Un esempio importante di successione monotona è il seguente:

Esempio. *Il numero e.*

Consideriamo la successione il cui termine n-esimo è

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Si può provare che essa è:
• strettamente crescente;
• limitata superiormente (3 è un maggiorante).

Perciò, per il teorema del limite per le successioni monotone, è convergente. Il suo limite si denota con e ed è detto *numero di Nepero.* Tale numero è irrazionale e un suo valore approssimato (a meno di 10^{-9}) è dato da $2,7182818284$. Notiamo che questa è una delle possibili definizioni del numero e (un'altra, che vedremo in seguito, è quella basata sulla nozione di serie).

Il logaritmo naturale (o in base e) di un numero x si denota $\ln x$ o $\log x$.

Esempio. Proviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Si ha

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}.$$

D'altra parte

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1+1} = \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\right] \to e.$$

Esempio. Proviamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Per $x > 0$, si ha

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

D'altra parte, dal limite della successione $\{(1+1/n)^n\}$ considerato sopra, si deduce che il primo e l'ultimo membro della precedente disequazione tendono a e. Di conseguenza, per il Teorema dei carabinieri, si ottiene che il limite per $x \to +\infty$ è uguale a e. Applicando il Teorema di cambiamento di variabile per i limiti e tenendo conto del fatto che $(1-1/n)^n \to 1/e$, si verifica che anche il limite per $x \to -\infty$ è uguale a e.

Inoltre, ponendo $x = 1/y$ e applicando nuovamente il Teorema di cambiamento di variabile, si deduce che

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Infine, tenendo conto della continuità della funzione logaritmo, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1\,.$$

Infatti, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log\,(1+x)^{1/x} = \log e = 1\,.$$

Dal Teorema di collegamento si ha

se $\{a_n\}$ è una qualunque successione divergente (a $+\infty$ oppure a $-\infty$), allora

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Da quest'ultimo risultato si deduce facilmente che, fissato $k \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)^n = e\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+k}{n+k+1}\right)^n = \frac{1}{e}\,.$$

Nel calcolo dei limiti di successione sono utili i seguenti teoremi.

Teorema. *Sia data una successione $\{a_n\}$ a termini positivi. Allora si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\,,$$

purché esista il limite al secondo membro.

Esempio. Usando il teorema precedente si deduce immediatamente che

$$\sqrt[n]{h} \to 1\,, (h>1); \qquad \sqrt[n]{n} \to 1\,; \qquad \sqrt[n]{n!} \to +\infty\,; \qquad \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \to e.$$

Ad esempio, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1\,.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\,!}\,\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e\,.$$

Teorema (criterio del rapporto per le successioni). *Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi. Supponiamo che la successione $\{b_n\} = \{a_{n+1}/a_n\}$ ottenuta da $\{a_n\}$ facendo il rapporto tra un termine e il precedente ammetta limite β (finito o infinito). Allora, se $\beta < 1$ la successione $\{a_n\}$ è infinitesima, se $\beta > 1$ la successione $\{a_n\}$ è infinita.*

Esempio. Proviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |r| < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \\ +\infty & \text{se } r > 1 \\ \nexists & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

Dimostrazione. Consideriamo ad esempio il caso $|r| < 1$. Per il criterio del rapporto, essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|r^{n+1}|}{|r^n|} = |r| < 1\,,$$

si ottiene $|r^n| \to 0$. Di conseguenza, poiché come visto in precedenza una successione è infinitesima se e solo se lo è il suo valore assoluto, allora anche $r^n \to 0$. Gli altri casi sono lasciati per esercizio. $\square$

Esempio. Facendo uso del criterio del rapporto si deduce che

$$\frac{n^\alpha}{r^n} \to 0\,(\alpha > 0, r > 1)\,,\; \frac{r^n}{n\,!} \to 0\,,\; \frac{n\,!}{n^n} \to 0\,.$$

Ad esempio, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n\,!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1\,,$$

da cui, per il criterio del rapporto, $n\,!/n^n \to 0$.

Esempio. Si ha la seguente scala di infiniti:

$$\log n,\; n^\alpha(\alpha > 0),\; r^n(r > 1),\; n\,!,\; n^n.$$

La scala va intesa nel senso che il limite tra un infinito e il successivo è 0.