ESERCIZIO STUDIARE $f(x) = \sqrt[3]{(|x|-1)(|x|-2)^2}$

OSSERVIAMO CHE $f(x)$ È PARI, INFATTI $f(x) = f(-x)$

STUDIAMO DUNQUE $f(x)$ SOLO PER $x \geq 0$

DOMINIO $\mathbb{R}$

SEGNO $f(x) \geq 0 \iff (x-1) \geq 0$ (INFATTI $(x-2)^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

$\iff x \geq 1$

$f(x) = 0 \iff x = 1 \lor x = 2$

LIMITI STUDIAMO SOLO $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, AVREMO POI $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ PER SIMMETRIA

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x\left(1-\frac{1}{x}\right) \cdot x^2 \left(1-\frac{2}{x}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \cdot \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)^2} = +\infty$$

NON CI SONO ASINTOTI ORIZZONTALI, VEDIAMO SE CE NE SONO OBLIQUI (CI ASPETTIAMO CI SIANO PERCHÉ L'ANDAMENTO ASINTOTICO DI $f(x)$ È LO STESSO DI x)

PER DETERMINARE IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA CHE SI COMPORTA ASINTOTICAMENTE COME $f(x)$ CALCOLIAMO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}}{x} = 1$$

DUNQUE $m = 1$ COEFF. ANG. DELLA RETTA CHE È ASINTOTO

PER DETERMINARE LA SUA ORDINATA ALL'ORIGINE CALCOLIAMO

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) \cancel{= \lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)^2} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} - x \right)$$

ESSENDO UNA FORMA INDETERMINATA, PROCEDIAMO CON UNA SORTA DI RAZIONALIZZAZIONE PER RICONDURSI AD UNA DIFF. DI CUBI

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} - x \right) \cdot \frac{\left[\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4} + x\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x^2\right]}{\left[\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4} + x\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x^2\right]}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)(x-2)^2 - x^3}{\left[\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4} + x\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x^2\right]} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^2 + 8x - 4}{\left[\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4} + x\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x^2\right]} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(-5 + \frac{8}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^4} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)^2} + 1\right)} = -\frac{5}{3}$$

DUNQUE ASINTOTICAMENTE, PER $x \to +\infty$, $f(x)$ SI COMPORTA COME LA RETTA $r(x) = x - \frac{5}{3}$

CRESCENZA

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{(x-2)^2 + (x-1)\cdot 2 \cdot (x-2)}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4}} = \frac{1}{3} \frac{\cancel{(x-2)}(x-2+2x-2)}{\cancel{(x-2)}\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{3x-4}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}$$

È DEFINITA $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1 \wedge x \neq 2$

VEDIAMO IL COMPORTAMENTO AL LIMITE PER $x \to 1$ E $x \to 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 \quad \text{PUNTO A TG VERTICALE}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2 \quad \text{PUNTO CUSPIDALE}$$

DUNQUE $x = 1$ E $x = 2$ SONO PUNTI DI NON DERIVABILITA'.

STUDIAMO IL SEGNO DI $f'(x)$ SU $[0,1[\, \cup \,]1,2[\, \cup \,]2,+\infty[$

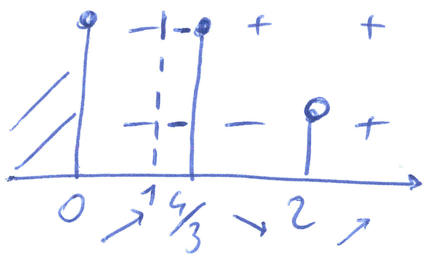
$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{3x-4}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}} \geq 0 \; \cancel{\Leftrightarrow \frac{3x-4}{x-2} \geq 0}$$

NUMERATORE $\quad \frac{1}{3}(3x-4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$

DENOMINATORE $\quad \sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

DUNQUE $f(x)$ CRESCENTE IN

$[0, \frac{4}{3}[\, \cup \,]2, +\infty[$



SAPPIAMO GIA' CHE $f(2) = 0$, DUNQUE SARA' UN MINIMO RELATIVO

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \quad \text{MAX REL.}$$

CONVESSITA'

$$f''(x) = \frac{1}{3} \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)} - (3x-4)\frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2-8x+5}{\sqrt[3]{(x-1)^4(x-2)^2}}}{\sqrt[3]{(x-1)^4(x-2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{3 \cdot (x-1)^2(x-2) - \frac{1}{3}(3x-4) \cdot (3x-5)(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^8(x-2)^4}} =$$

$$= \frac{(x-1)\left[x^2 - 3x + 2 - 3\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{5}{3}\right)\right]}{\sqrt[3]{(x-1)^8(x-2)^4}} =$$

$$= -\frac{2}{9} \frac{(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^8(x-2)^4}}$$

$f''(x) \geq 0 \iff -\frac{2}{9}(x-1) \geq 0 \iff x < 1$

DUNQUE $f(x)$ CONVESSA PER $x<1$ E

CONCAVA ALTROVE

ABBIAMO COMPLETATO LO STUDIO PER $x>0$.

OSSERVIAMO INFINE CHE $f(0) = -\sqrt[3]{4}$, CHE

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

DUNQUE È CONTINUA IN 0

INFINE

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3}\frac{3x-5}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}} = \frac{1}{6}$$

MENTRE

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} D[f(-x)] = \lim_{x\to 0^+}(-f'(x)) = -\frac{1}{6}$$

(INFATTI LA DERIVATA DI UNA FUNZ. PARI È DISPARI)

DUNQUE $x=0$ PUNTO DI NON DERIVABILITÀ (ANGOLOSO)