Registro delle lezioni del corso di Equazioni Differenziali
Università di Firenze - Scuola di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
a.a. 2019/20 - Prof. M.Patrizia Pera

1^a **settimana - 26-27.9.19**

• Testo di riferimento :

Mugelli F. – Spadini M., *Metodi matematici*, Società Editrice Esculapio, 2013.

• Testi consigliati per consultazione :

– Nakhlé H. Asmar, *Partial Differential Equations, with Fourier Series and Boundary Value Problems*, Pearson, 2004.

– Bramanti M., *Metodi di analisi Matematica per l'Ingegneria*, Società Editrice Esculapio, 2017.

– Tomarelli F., *Mathematical Analysis Tools for Engineering*, Società Editrice Esculapio, 2019.

Equazioni differenziali ordinarie

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un aperto A di $\mathbb{R}^2$. Un'uguaglianza del tipo

$$y' = f(x, y)$$

si chiama *equazione differenziale (ordinaria del prim'ordine) in forma normale.* Si fa presente che per capire cosa sia un'equazione (anche non differenziale), a parte il modo di chiamarla o di scriverla, è indispensabile aver ben definito il concetto di soluzione. In altre parole, è necessario avere un criterio chiaro per decidere quando, in un assegnato insieme in cui si cercano le soluzioni, un elemento di tale insieme è o non è una soluzione. Per quanto riguarda la precedente equazione, l'insieme in cui si cercano le soluzioni è l'insieme delle funzioni reali definite in un intervallo non banale e derivabili con continuità. Più precisamente,

Definizione. Una funzione reale di una variabile $y\colon I \to \mathbb{R}$ definita in un intervallo non banale I e di classe C^1 in I è una *soluzione* dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ se, per ogni $x \in I$, si ha $(x, y(x)) \in A$ e

$$y'(x) = f(x, y(x))\,.$$

L'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale si dice *soluzione generale* o *integrale generale.*

Esempio. 1) Il più banale esempio di equazione differenziale è

$$y' = f(x)\,,$$

dove f è una funzione continua definita in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. In questo caso la soluzione generale è data dall'insieme delle primitive di f.

2) Un altro esempio semplice di equazione differenziale si ha quando ci poniamo il problema di cercare una funzione definita in un intervallo che ivi coincida con la sua derivata, cioè

$$y' = y\,.$$

In questo caso si ha $f(x, y) = y$ e una funzione che risolve tale equazione è ovviamente $y(x) = e^x$. Si verifica immediatamente che anche $y(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$, è soluzione. Come nell'esempio precedente, anche in questo caso troviamo infinite soluzioni, dipendenti da una costante $c \in \mathbb{R}$. Come vedremo meglio in seguito questo fatto non è casuale ma ha un preciso riscontro teorico.

Osserviamo che, data una soluzione $y\colon I \to \mathbb{R}$, la sua restrizione ad un sottointervallo non banale di I è ancora una soluzione. Tra tutte le soluzioni, quelle che non sono restrizione di altre soluzioni si dicono *massimali* (o *non prolungabili*). Si potrebbe dimostrare che ogni soluzione non massimale è la restrizione di una massimale. In altre parole, ogni soluzione non massimale si può prolungare fino ad ottenere una soluzione massimale.

Non sempre la variabile di un'equazione differenziale viene indicata con x, e non sempre la funzione incognita si denota con y. Ad esempio,

$$x' = f(t, x)$$

è un'equazione differenziale dove t è la variabile e $x(t)$ la funzione incognita. Spesso, quando t denota la variabile "tempo", si scrive $\dot{x}$ invece che x'.

Sia $y' = f(x, y)$ un'equazione differenziale del prim'ordine in forma normale e sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ l'aperto su cui è definita la funzione f. Dato un punto $(x_0, y_0) \in A$, ci si pone il problema di trovare, tra tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione, quella che verifica (o quelle che verificano) la condizione $y(x_0) = y_0$. In altre parole, tra tutte le soluzioni, si cercano quelle il cui grafico contiene il punto (x_0, y_0) assegnato. Tale *problema* viene detto *di Cauchy* e si scrive

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0\,. \end{cases}$$

La condizione $y(x_0) = y_0$ si chiama *condizione di Cauchy* o anche *condizione iniziale*. Il punto x_0 si dice *punto* (o *istante*) *iniziale* (della soluzione cercata) e y_0 è il *valore iniziale*.

Il seguente risultato dà una risposta al problema posto e asserisce che la continuità della funzione f assicura l'esistenza di almeno una soluzione del problema di Cauchy per l'equazione $y' = f(x, y)$.

Teorema (di esistenza di Peano). *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Allora, per ogni $(x_0, y_0) \in A$, l'equazione $y' = f(x, y)$ ammette almeno una soluzione che verifica la condizione $y(x_0) = y_0$.*

Esempio (di non unicità della soluzione di un problema di Cauchy). Si osservi che le funzioni $y_1(x) \equiv 0$ e $y_2(x) = x^3$ sono due soluzioni (massimali) dell'equazione differenziale

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

e verificano entrambe la condizione di Cauchy $y(0) = 0$.

Il risultato che segue fornisce una condizione sufficiente affinché il problema di Cauchy ammetta un'unica soluzione massimale. Ovviamente se si considerano le soluzioni non massimali non si può avere unicità perché la restrizione di una soluzione ad un sottointervallo non banale del dominio è ancora una soluzione (ed è diversa dalla precedente).

Teorema (di esistenza e unicità per le equazioni del prim'ordine). *Consideriamo l'equazione differenziale*

$$y' = f(x, y)\,,$$

dove f è una funzione continua in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Se f è derivabile rispetto ad y e la derivata parziale f_y è continua, allora, per ogni $(x_0, y_0) \in A$, l'equazione ammette un'unica soluzione massimale che verifica la condizione $y(x_0) = y_0$.

Dal teorema di esistenza e unicità si deduce un'importante conseguenza:

Corollario. *Consideriamo l'equazione differenziale*

$$y' = f(x, y)\,,$$

dove f è una funzione continua in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Supponiamo che f sia derivabile rispetto ad y con derivata continua. Allora i grafici di due differenti soluzioni massimali non possono intersecarsi.

Una proprietà significativa delle soluzioni di un'equazione differenziale è espressa dal teorema che segue. Per enunciarlo occorre introdurre la seguente nozione: una soluzione $y\colon I \to \mathbb{R}$ che non sia restrizione di un'altra soluzione definita in un intervallo più ampio a destra (sinistra) si dice *massimale a destra (a sinistra)*, o *non prolungabile a destra (a sinistra)*. Ovviamente, una soluzione è massimale se e solo se è massimale sia a destra sia a sinistra.

Teorema (di Kamke). *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Il grafico di una soluzione massimale a destra (a sinistra) dell'equazione differenziale*
$$y' = f(x, y)$$
non può essere contenuto in un sottoinsieme limitato e chiuso di A.

In un certo senso il Teorema di Kamke afferma che il grafico di ogni soluzione massimale (che, ricordiamo, è un sottoinsieme del dominio A della funzione f) è una curva che "prosegue" (sia verso destra sia verso sinistra) finché le è consentito proseguire. In parole povere prosegue verso destra (ma anche verso sinistra) fino a raggiungere la frontiera di A (e allora si deve arrestare), oppure se ne va all'infinito (sempre rimanendo dentro A). Ciò che non può accadere è che il grafico di una soluzione non prolungabile si arresti in un punto interno ad A: il Teorema di Peano gli consentirebbe di proseguire, contraddicendo la non prolungabilità.

Equazione a variabili separabili.

Un'equazione differenziale del tipo

$$y' = a(x)h(y)\,,$$

dove a e h sono funzioni di una variabile definite in aperti di $\mathbb{R}$, si dice a *variabili separabili*. Cerchiamo di spiegarne il motivo, illustrandone il metodo di risoluzione. Supponiamo a continua e h di classe C^1. Con tali ipotesi la funzione $f(x, y) := a(x)h(y)$ soddisfa le condizioni del teorema di esistenza e unicità.

Supponiamo inoltre che a si annulli soltanto in punti isolati. Se $y_0 \in \mathbb{R}$ è un punto tale che $h(y_0) = 0$, allora la funzione costante $y(x) \equiv y_0$ è chiaramente una soluzione dell'equazione differenziale. Viceversa, (avendo supposto che a si possa annullare soltanto in punti isolati), ogni soluzione costante $y(x) \equiv y_0$ è tale $h(y_0) = 0$. Le soluzioni costanti sono quindi in corrispondenza biunivoca con gli zeri di h.

Occupiamoci quindi di determinare le soluzioni non costanti. Se $x \mapsto y(x)$ è una tale soluzione, per il teorema di esistenza e unicità si deve avere $h(y(x)) \neq 0$ per ogni x nell'intervallo I in cui è definita y (altrimenti il grafico di y intersecherebbe il grafico di una soluzione costante). Dividendo l'uguaglianza

$$y'(x) = a(x)h(y(x))$$

per $h(y(x))$ si ha allora

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = a(x)\,.$$

Integrando entrambi i membri dell'uguaglianza si ottiene

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))} dx = \int a(x) dx\,.$$

Dunque, denotando con $H(y)$ una primitiva di $1/h(y)$ (in un intervallo in cui h non si annulla) e con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, si ottiene

$$H(y(x)) = A(x) + c\,,$$

dove c è un'arbitraria costante. (Ovviamente, per verificare che $H(y(x))$ è una primitiva di $y'(x)/h(y(x))$, occorre tener conto del teorema di derivazione di una funzione composta).

Ricavando la y (osserviamo esplicitamente che H è iniettiva perché la stiamo considerando in un intervallo in cui la sua derivata $H'(y) = 1/h(y)$ ha segno costante) si ha la formula

$$y(x) = H^{-1}(A(x) + c)$$

che dà **le soluzioni non costanti** dell'equazione a variabili separabili considerata. Si lascia per esercizio la verifica che ogni funzione del tipo

$$y(x) = H^{-1}(A(x) + c)\,,$$

purché la si consideri definita in un intervallo, è effettivamente una soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = a(x)h(y)\,.$$

Si avverte che nell'eseguire la verifica, la presenza di H^{-1} rende indispensabile l'uso del teorema di derivazione di una funzione inversa.

Torniamo per un momento all'uguaglianza

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = a(x)\,,$$

Essa esprime il fatto che la funzione $y(x)$ verifica l'equazione differenziale

$$\frac{1}{h(y)}\,\frac{dy}{dx} = a(x)\,,$$

che, per abuso di notazioni (e per tradizione), viene talvolta scritta nella forma

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = a(x)dx\,,$$

dove la variabile dipendente y è separata dalla variabile indipendente x, nel senso che una sta soltanto nel primo membro dell'equazione e l'altra nel secondo (ed ecco perché l'equazione iniziale si dice "a variabili separabili"). Il metodo tradizionale (ma poco ortodosso) per risolvere l'ultima equazione (quella con le variabili separate) consiste nell'integrare entrambi i membri.

Si ha quindi

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int a(x)dx$$

da cui, con le notazioni introdotte sopra, si ottiene

$$H(y) = A(x) + c\,,$$

o, anche,

$$y = H^{-1}(A(x) + c)\,.$$

Osservazione. Il metodo per risolvere le equazioni a variabili separabili esposto sopra si può applicare anche quando h è solo continua (non sono cioè soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità), purché ci si limiti alla ricerca delle soluzioni $y(x)$ tali che $h(y(x)) \neq 0$. Si fa presente che se la funzione reale $y \mapsto h(y)$ non ha la derivata continua, possono esistere soluzioni non costanti il cui grafico incontra il grafico di una soluzione costante, come, ad esempio, accade per la soluzione $y(x) = x^3$ dell'equazione a variabili separabili $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.

Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = y^2\,.$$

Essa è a variabili separabili con $a(x) = 1$ e $h(y) = y^2$. Ovviamente l'equazione possiede la soluzione nulla che è l'unica soluzione costante. Cerchiamo ora le soluzioni non costanti. Sia y una soluzione non costante. Come già osservato, essa non potrà annullarsi in nessun punto e quindi sarà o sempre positiva o sempre negativa. Dividendo per $y^2(x)$ entrambi i membri dell'uguaglianza $y'(x) = y^2(x)$ e integrando si ottiene

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}dx = \int 1dx$$

da cui

$$-\frac{1}{y(x)} = x + c\,,\ c \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza, le soluzioni non costanti dell'equazione sono date dalla formula

$$y(x) = -\frac{1}{x+c}$$

e l'intervallo massimale di definizione è $(-\infty, -c)$ se $y(x) > 0$ e $(-c, +\infty)$ se $y(x) < 0$. Ad esempio, la soluzione (massimale) dell'equazione con dato iniziale $y(0) = 1$ si ottiene per $c = -1$ ed è quindi data dalla restrizione della funzione

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

all'intervallo $(-\infty, 1)$. Si osservi che anche la soluzione con dato iniziale $y(2) = -1$ si ottiene per $c = -1$, ma non coincide con la precedente soluzione perché in questo caso l'intervallo di definizione è la semiretta $(1, +\infty)$. Se invece consideriamo il dato iniziale $y(3) = 0$, otteniamo la soluzione costante $y(x) = 0$ per ogni x, il cui intervallo di definizione è $\mathbb{R}$.

Osservazione. Nel caso (molto frequente) in cui la funzione f di un'equazione differenziale in forma normale $y' = f(x, y)$ sia definita in una striscia $A = (a, b)\times\mathbb{R}$ (con a e b reali estesi), il dominio di una qualunque soluzione è necessariamente contenuto nella base (a, b) della striscia. Talvolta però può coincidere con l'intervallo (a, b) stesso. In tal caso si dice che la soluzione è *persistente* (o *globale*). Ovviamente ogni soluzione persistente è necessariamente massimale (ossia non è prolungabile). L'equazione differenziale $y' = y^2$ considerata in precedenza mostra che possono esistere soluzioni massimali non persistenti (il Teorema di Kamke implica che tali soluzioni non possono essere limitate).

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \\ \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili con $h(y) = 1 + y^2$ che ovviamente è derivabile infinite volte e quindi il problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione massimale. Essendo $h(y) > 0$ per ogni y, possiamo dividere per $h(y) > 0$ e integrare. Si ha

$$\int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

da cui

$$\operatorname{arctang} y(x) = \operatorname{arctang} x + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.$$

Considerando la condizione iniziale $y(0) = 1$, si ricava $c = \operatorname{arctang} 1 = \pi/4$, per cui la soluzione massimale del problema di Cauchy è

$$\operatorname{arctang} y(x) = \operatorname{arctang} x + \frac{\pi}{4}$$

definita se $|\operatorname{arctang} x+\pi/4| < \pi/2$, cioè nell'intervallo $(-\infty, 1)$. In questo caso, facendo uso di formule note di trigonometria, si riesce anche a ricavare l'espressione esplicita della soluzione. Si ottiene

$$y(x) = \operatorname{tang}\Big(\operatorname{arctang} x + \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{x+1}{1-x}\,.$$

Esercizio. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = 1 - y^2\,.$$

Esempio. Consideriamo l'equazione

$$y' = (2x - y)^2\,.$$

Essa soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità essendo la funzione $f(x, y) = (2x - y)^2$ addirittura derivabile infinite volte. Sia $y(x)$ una soluzione dell'equazione. Poniamo

$$z(x) = 2x - y(x)\,.$$

Poiché $z'(x) = 2 - y'(x)$, si ricava che $z(x)$ è soluzione dell'equazione

$$z' = 2 - z^2\,.$$

Quest'ultima equazione è a variabili separabili e la sua risoluzione è lasciata per esercizio.

Equazioni lineari del prim'ordine.

Una classe particolarmente importante di equazioni differenziali del prim'ordine in forma normale sono le equazioni lineari.

Un'equazione differenziale del prim'ordine si dice *lineare* se è della forma

$$y' = a(x)y + b(x)\,,$$

dove a e b sono due funzioni continue definite in un intervallo I. In particolare, quando il *termine noto* b è identicamente nullo, l'equazione si dice *lineare omogenea*, e in questo caso la funzione identicamente nulla è soluzione dell'equazione differenziale (si chiama soluzione *banale* o *nulla*).

Cominciamo con lo studiare l'equazione lineare omogenea. Il teorema seguente descrive l'integrale generale di tale equazione.

Teorema. *Sia a una funzione continua in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Le soluzioni (massimali) dell'equazione (lineare omogenea del prim'ordine)*

$$y' = a(x)y$$

sono le funzioni del tipo

$$y(x) = ce^{A(x)}\,,$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ in I e c un'arbitraria costante.

Dimostrazione. L'equazione è a variabili separabili. Si osserva che l'unica soluzione costante è quella banale (cioè la funzione identicamente nulla). Per trovare le soluzioni non costanti separiamo le variabili. Sia $y(x)$ una soluzione non costante. Per quanto osservato in precedenza, si ha $y(x) \neq 0$ per ogni x e, dividendo, si ottiene

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)\,,$$

da cui,

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int a(x)\,dx\,.$$

Quindi

$$\log|y(x)| = A(x) + k\,,$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ e k è un'arbitraria costante. Pertanto

$$|y(x)| = e^{A(x)+k} = e^k e^{A(x)},$$

cioè

$$y(x) = \pm e^k e^{A(x)}$$

o, equivalentemente, tenendo conto che e^k è un'arbitraria costante positiva, una qualunque soluzione non costante è data da

$$y(x) = ce^{A(x)}, \quad \text{con } c \neq 0\,.$$

Poiché ponendo $c = 0$ nella precedente equazione si ottiene la soluzione banale (che avevamo considerato a parte), si può affermare che la soluzione generale dell'equazione differenziale $y' = a(x)y$ è data da

$$y(x) = ce^{A(x)},$$

con c costante arbitraria, anche nulla. □

Consideriamo ora l'equazione lineare non omogenea.

Teorema. *Supponiamo che $\bar{y}$ sia una soluzione dell'equazione differenziale lineare*

$$y' = a(x)y + b(x)\,,$$

dove a e b sono funzioni continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora la soluzione generale dell'equazione non omogenea si ottiene aggiungendo ad $\bar{y}$ la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y' = a(x)y$, cioè ogni soluzione dell'equazione non omogenea è del tipo

$$y(x) = \bar{y}(x) + ce^{A(x)}, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Dimostrazione. Proviamo prima che se u è una soluzione dell'equazione omogenea, allora la funzione $\bar{y} + u$ è soluzione della non omogenea. Dalle uguaglianze

$$\bar{y}'(x) = a(x)\bar{y}(x) + b(x) \quad \text{e} \quad u'(x) = a(x)u(x)$$

segue

$$(\bar{y}(x) + u(x))' = \bar{y}'(x) + u'(x) = (a(x)\bar{y}(x) + b(x)) + a(x)u(x) =$$

$$a(x)(\bar{y}(x) + u(x)) + b(x)\,.$$

Ciò prova che $\bar{y} + u$ è soluzione della non omogenea.

Viceversa, rimane da provare che se $\tilde{y}$ è una qualunque soluzione dell'equazione non omogenea, allora esiste $\bar{c} \in \mathbb{R}$ tale che $\tilde{y}(x) = \bar{y}(x) + \bar{c}e^{A(x)}$. In altre parole, rimane da provare che, posta $\bar{u}(x) := \tilde{y}(x) - \bar{y}(x)$, la funzione $\bar{u}$ è soluzione dell'equazione omogenea. Si ha

$$\bar{u}(x)' = (\tilde{y}(x) - \bar{y}(x))' = \tilde{y}(x)' - \bar{y}(x)' =$$

$$a(x)\tilde{y}(x) + b(x) - (a(x)\bar{y}(x) + b(x)) = a(x)(\tilde{y}(x) - \bar{y}(x)) = a(x)\bar{u}(x).$$

□

Osservazione. Il teorema precedente, nel caso particolare in cui la funzione a sia nulla, si riduce ad un risultato ben noto: *data una primitiva $\bar{y}$ di b, ogni altra primitiva si ottiene aggiungendo ad $\bar{y}$ un'arbitraria costante (ossia, la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea $y' = 0$).*

Osservazione. Notiamo che nel caso di un'equazione differenziale lineare la funzione $(x, y) \mapsto a(x)y + b(x)$ è definita nella striscia $I \times \mathbb{R}$, essendo $I \subseteq \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione delle funzioni a e b. Si può dimostrare che per tale equazione le soluzioni massimali sono definite in I, cioè, ricordando la definizione data in precedenza, che esse sono persistenti.

Abbiamo visto che per trovare la soluzione generale di un'equazione non omogenea occorre prima trovarne almeno una (comunemente detta *soluzione particolare*). Un metodo per trovare una soluzione particolare è il cosiddetto *metodo di variazione della costante* (per equazioni di ordine superiore al primo si chiama *metodo di variazione delle costanti*).

Consideriamo l'equazione

$$y' = a(x)y + b(x)\,.$$

Sappiamo che la soluzione generale dell'omogenea associata è data da

$$u(x) = ce^{A(x)}\,,$$

dove A è una primitiva di a e c una costante arbitraria. Il metodo consiste nel cercare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, pensando "variabile" la costante c. In altre parole, si cerca una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = c(x)e^{A(x)}\,.$$

Derivando si ottiene

$$\bar{y}'(x) = c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)}\,.$$

Sostituendo l'espressione trovata nell'equazione differenziale, si ha

$$c'(x)e^{A(x)} + a(x)c(x)e^{A(x)} = a(x)c(x)e^{A(x)} + b(x)\,,$$

da cui si deduce che $\bar{y}$ è soluzione se (e solo se)

$$c'(x) = e^{-A(x)}b(x)\,,$$

ossia se (e solo se) $c(x)$ è una primitiva di $e^{-A(x)}b(x)$.

Di conseguenza, la soluzione generale dell'equazione non omogenea è data da

$$y(x) = ce^{A(x)} + e^{A(x)}\int e^{-A(x)}b(x)\,dx\,,$$

dove c è un'arbitraria costante, ed è definita nell'intervallo I.

Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' + 2xy = x\,.$$

Supponiamo di voler trovare, tra tutte le soluzioni, quella che verifica la condizione di Cauchy $y(0) = 0$. Poiché $A(x) = -x^2$, si ha

$$y(x) = ce^{-x^2} + c(x)e^{-x^2}\,,$$

con

$$c'(x) = e^{x^2}x\,.$$

Integrando, si ottiene perciò

$$c(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

e, quindi,

$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}\,.$$

Dobbiamo ancora determinare la costante c in modo che sia verificata la condizione $y(0) = 0$. Abbiamo

$$y(0) = c + \frac{1}{2} = 0\,,$$

da cui si ricava $c = -1/2$. La soluzione cercata è dunque

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x^2}\right),$$

come si può facilmente verificare (si invita lo studente a farlo). Osserviamo che l'equazione precedente è a variabili separabili e quindi può anche essere risolta con il metodo visto per tali tipi di equazioni.

Esempio. Consideriamo l'equazione

$$y' = xy + e^{x^2/2}\,.$$

Le soluzioni dell'equazione omogenea $y' = xy$ sono della forma $y(x) = ce^{x^2/2}$, $c \in \mathbb{R}$. Per trovare una soluzione dell'equazione non omogenea usiamo il metodo della variazione della costante, cioè cerchiamola nella forma $\bar{y}(x) = c(x)e^{x^2/2}$. Si ha $c'(x) = 1$, per cui si può prendere come soluzione particolare $\bar{y}(x) = xe^{x^2/2}$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = (x + c)e^{x^2/2}\,, c \in \mathbb{R}\,.$$

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy + x^3 \\ \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Applichiamo direttamente la formula risolutiva delle equazioni lineari. Una primitiva di $a(x) = x$ è $A(x) = x^2/2$; l'integrale generale dell'equazione $y' = xy + x^3$ è perciò

$$y(x) = ce^{x^2/2} + \left(e^{x^2/2} \int x^3 e^{-x^2/2}\, dx \right) , \ c \in \mathbb{R} .$$

Usando due volte la formula di integrazione per parti e tenendo conto della condizione $y(0) = 1$, si ottiene

$$y(x) = -(x^2 + 2) + 3e^{x^2/2} .$$

Esercizio. Data l'equazione $Ly' + Ry = E$, con $L, R, E > 0$, trovare la soluzione tale che $y(0) = I_0$ e tracciarne il grafico se $I_0 > E/R$. Mostrare che ogni soluzione tende a E/R per $x \to +\infty$. Osserviamo che questa equazione può rappresentare ad esempio un modello di circuito elettrico con resistenza R, induttanza L e forza elettromotrice E; in tal caso la soluzione $y(x)$ è l'intensità di corrente.

Equazioni di ordine superiore al primo.

Passiamo ora a considerare equazioni differenziali di ordine superiore al primo. Un'espressione del tipo

$$y'' = f(x, y, y') ,$$

dove f è una funzione continua definita su un aperto A di $\mathbb{R}^3$, si dice un'*equazione differenziale del second'ordine (in forma normale)*. Come precedentemente affermato, se di un'equazione non è ben definito il concetto di soluzione, non è ben definita l'equazione stessa; e per introdurre in modo corretto la nozione di equazione occorrono due ingredienti: 1) un insieme in cui si cercano le soluzioni; 2) un criterio chiaro per stabilire quando un elemento di tale insieme abbia il diritto di chiamarsi soluzione.

Per quanto riguarda l'equazione del second'ordine considerata sopra, le soluzioni si cercano nell'insieme delle funzioni definite in un intervallo e aventi derivata seconda continua in tale intervallo. Una funzione y di tale insieme si dirà una soluzione se per ogni x appartenente all'intervallo I in cui è definita risulta

$$(x, y(x), y'(x)) \in A \quad \text{e} \quad y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) .$$

Dal punto di vista fisico, un'equazione del secondo ordine può rappresentare la legge di moto di un punto materiale di massa unitaria, vincolato a muoversi in una retta e sottoposto ad una forza f dipendente dal tempo (in questo caso la variabile "tempo" si denota con t invece che con x), dalla posizione e dalla velocità (denotate rispettivamente con x e con $\dot{x}$). Ovviamente, non è l'unica interpretazione fisica: un'equazione del second'ordine ne può avere molte altre o, più precisamente, molti fenomeni fisici (e non solo di dinamica) sono governati da equazioni differenziali del second'ordine (e non solo del second'ordine).

Più in generale, un'equazione differenziale di ordine n (in forma normale) è un'espressione del tipo

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

dove $f\colon A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua da un aperto A di $\mathbb{R}^{n+1}$ in $\mathbb{R}$. Una soluzione è una funzione y definita in un intervallo I, con derivata n-esima continua in I e tale che, $\forall\, x \in I$,

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in A$$

e

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

Come per le equazioni del prim'ordine, anche per quelle di ordine n il *problema di Cauchy* consiste nella ricerca delle soluzioni che "passano" per un punto assegnato dell'aperto A in cui è definita la f. In altre parole, dato un punto $p = (x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in A$, tra tutte le soluzioni y dell'equazione

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

si cerca quella che verifica (o quelle che verificano) le n condizioni

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,.$$

Anche per le equazioni di ordine n si può definire il concetto di soluzione massimale e vale ancora un teorema di esistenza e unicità. Ci limitiamo a dire che se la funzione di $n+1$ variabili $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \mapsto f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ è continua e se è derivabile rispetto alle n variabili y, y', …, $y^{(n-1)}$ con derivate continue, allora il problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione massimale. Tornando all'esempio fisico dell'equazione di moto di un punto vincolato ad una retta, ciò significa che se ad un certo istante t_0 si assegna la posizione x_0 e la velocità $\dot{x}_0$, il moto è determinato.

Esaminiamo ora delle **particolari equazioni del secondo ordine**.

Caso 1: Equazioni della forma

$$y'' = f(x, y')$$

(cioè f non dipende esplicitamente da y) con f continua nelle due variabili e derivabile con continuità rispetto alla seconda variabile. Si procede abbassando il grado dell'equazione, cioè trasformando l'equazione del second'ordine in una del prim'ordine, come è illustrato negli esempi che seguono

Esempio. Consideriamo l'equazione

$$y'' = \frac{y'}{x}\,.$$

Essa è un'equazione lineare (vedi dopo la trattazione generale di tali equazioni) e le soluzioni massimali sono definite o per $x > 0$ o per $x < 0$. Consideriamo ad esempio il caso $x > 0$. Sia $y(x)$ una soluzione dell'equazione in $(0, +\infty)$. Poiché nel secondo membro non compare esplicitamente la variabile y, la funzione $z(x) = y'(x)$ soddisfa l'equazione del prim'ordine

$$z' = \frac{z}{x}\,.$$

Perciò

$$z(x) = c_1\, x$$

per qualche costante $c_1 \in \mathbb{R}$, da cui

$$y(x) = c_1\,\frac{x^2}{2} + c_2$$

con $c_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = 3(x\,y')^2 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = -1\,. \end{cases}$$

Questo problema ha una e una sola soluzione massimale y definita in un opportuno intorno del punto $x_0 = 1$. Ponendo $y'(x) = z(x)$ si ottiene che z è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = 3(x\,z)^2 \\ z(1) = -1\,. \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione si ottiene $z(x) = -\frac{1}{x^3+c_1}$ per qualche costante reale c_1 da cui, essendo $z(1) = -1$, si ricava $c_1 = 0$ e quindi

$$z(x) = y'(x) = -\frac{1}{x^3}\,.$$

Di conseguenza,

$$y(x) = \frac{1}{2x^2} + c_2$$

ed essendo $y(1) = 1$ si ottiene infine

$$y(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x^2} + 1)$$

che, nell'intervallo $(0, +\infty)$ è la soluzione massimale cercata. Osserviamo che la stessa equazione differenziale con condizioni iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = 0$ ha come soluzione (che si vede per immediata sostituzione) la funzione costante $y(x) \equiv y_0$.

In maniera analoga si possono trattare le equazioni di ordine n del tipo $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$. Ad esempio, lasciamo per esercizio la risoluzione dell'equazione del terz'ordine $y^{(3)} = (xy'')^2$.

Caso 2: Equazioni della forma

$$y'' = f(y)$$

con f di classe C^1. Questa equazione, nell'interpretazione fisica come equazione fondamentale della dinamica, rappresenta il caso interessante in cui la forza dipende solo dalla posizione. Illustriamo con un esempio un metodo per determinare una soluzione dell'equazione. Altri esempi, nel caso in cui f sia della forma $f(y) = ky, k \in \mathbb{R}$, saranno dati in seguito nella trattazione delle equazioni lineari a coefficienti costanti.

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -2 \operatorname{sen} y \cos^3 y \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \,. \end{cases}$$

Essendo soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità, il problema ha una e una sola soluzione massimale. Se $y(x)$ è questa soluzione, poiché $y'(1) \neq 0$ si ha $y'(x) \neq 0$ in un intorno di $x_0 = 1$. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per $y'(x)$ e integrando si ottiene

$$\int y''(x)y'(x)\,dx = -2 \int \operatorname{sen} y(x) \cos^3 y(x) y'(x)\,dx$$

da cui

$$\frac{y'(x)^2}{2} = \frac{\cos^4 y(x)}{2} + c_1 \,.$$

Dalle condizioni iniziali si ricava $c_1 = 0$ e quindi, essendo $y'(1) > 0$, si ha che la soluzione $y(x)$ soddisfa l'equazione del prim'ordine (a variabili separabili)

$$y' = \cos^2 y$$

Di conseguenza y è tale che

$$\operatorname{tang} y(x) = x + c_2$$

per un'opportuna costante c_2. Ponendo $y(1) = 0$, si ottiene $0 = 1 + c_2$ e quindi

$$y(x) = \operatorname{arctang}(x - 1)$$

Equazioni lineari del second'ordine.

Un'equazione differenziale del second'ordine si dice *lineare* se è del tipo

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)\,,$$

dove a_0, a_1 e b sono funzioni continue in un intervallo I. Le funzioni a_0 e a_1 si dicono i *coefficienti* dell'equazione e b rappresenta il *termine noto*. Quando $b(x) \equiv 0$, l'equazione si dice *omogenea*.

Più in generale un'equazione differenziale lineare di ordine n sarà del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)\,,$$

con $a_0, \ldots, a_{n-1}$ e b funzioni continue in un intervallo I.

Per le equazioni lineari vale il teorema di esistenza e unicità e si potrebbe dimostrare che ogni soluzione massimale è *globale* (o *persistente*), il che ricordiamo significa che è definita in tutto l'intervallo I in cui sono definite le funzioni a_0, $\ldots, a_{n-1}$ e b.

L'integrale generale di un'equazione lineare del second'ordine a coefficienti continui è descritto dal seguente teorema. Un analogo risultato è valido per le equazioni di ordine n.

Teorema. *Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare non omogenea*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

si ottengono sommando ad una soluzione dell'equazione non omogenea tutte le possibili soluzioni dell'equazione omogenea associata. In altre parole, se $\bar{y}$ è una soluzione dell'equazione non omogenea, ogni altra soluzione è del tipo $y = \bar{y} + u$, dove u è una soluzione dell'equazione omogenea associata.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella fatta per le equazioni lineari del prim'ordine. La inseriamo per completezza. Mostriamo prima che, fissata una soluzione (detta particolare) $\bar{y}$ dell'equazione non omogenea, ogni funzione del tipo $\bar{y} + u$, dove u risolve l'equazione omogenea $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, è ancora una soluzione dell'equazione non omogenea. Per la linearità degli operatori di derivazione, si ha infatti

$$(\bar{y}(x) + u(x))'' + a_1(x)(\bar{y}(x) + u(x))' + a_0(x)(\bar{y}(x) + u(x)) =$$

$$\bar{y}''(x) + a_1(x)\bar{y}'(x) + a_0(x)\bar{y}(x) + u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) =$$

$$b(x) + 0 = b(x)\,.$$

Rimane da provare che se $\tilde{y}$ è una qualunque soluzione dell'equazione non omogenea, allora la differenza $\bar{u} := \tilde{y} - \bar{y}$ è una soluzione dell'omogenea. Risulta infatti

$$(\tilde{y}(x) - \bar{y}(x))'' + a_1(x)(\tilde{y}(x) - \bar{y}(x)))' + a_0(x)(\tilde{y}(x) - \bar{y}(x)) = b(x) - b(x) = 0\,. \;\square$$

Denotiamo con $C^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme costituito dalle funzioni di classe C^∞ da $\mathbb{R}$ in sé. Osserviamo che due funzioni di $C^\infty(\mathbb{R})$ si possono sommare ottenendo ancora una funzione di $C^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre, se si moltiplica una funzione di $C^\infty(\mathbb{R})$ per uno scalare reale (ossia per una costante appartenente ad $\mathbb{R}$) si ottiene ancora una funzione dello stesso insieme. Si ha così quello che viene chiamato uno *spazio vettoriale* sui reali (i reali si dicono gli scalari e gli elementi dello spazio i vettori). In tale spazio c'è un vettore che è neutro rispetto alla somma (cioè, sommato ad un qualunque vettore dà il vettore stesso): è la funzione identicamente nulla (chiamata *zero dello spazio*).

Definizione. Si dice che due funzioni $y_1, y_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ sono *linearmente indipendenti* se dall'uguaglianza

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

segue $c_1 = c_2 = 0$, ossia se l'unica combinazione lineare che dà la funzione (identicamente) nulla è quella con i coefficienti tutti nulli.

Esempio. Proviamo che se λ_1 e λ_2 sono due numeri reali distinti, allora le funzioni $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono linearmente indipendenti. Supponiamo infatti che la funzione

$$y(x) := c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$$

sia identicamente nulla. Di conseguenza, lo è anche la sua derivata. In particolare si ha $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, da cui si ottiene il sistema (di due equazioni in due incognite)

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \lambda_1c_1 + \lambda_2c_2 = 0 \end{cases}$$

che, come si verifica subito, ha come unica soluzione $c_1 = c_2 = 0$ essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Esempio. Mostriamo che le funzioni $\cos \omega x$ e $\operatorname{sen} \omega x$ (dove $\omega \in \mathbb{R}$) sono linearmente indipendenti. Supponiamo infatti che la funzione

$$y(x) := c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x$$

sia (identicamente) nulla. Poiché $y(x)$ è zero per ogni x, deve essere anche per $x = 0$. Ponendo $x = 0$ si ottiene $c_1 = 0$. Per provare che anche il coefficiente c_2 è nullo, basta porre $x = \pi/(2\omega)$.

Esercizio. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, provare che le funzioni $e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio. Dati due numeri reali α e β, provare che se $\beta \neq 0$, allora le due funzioni $e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ sono linearmente indipendenti.

Un altro metodo per stabilire se due soluzioni y_1, $y_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ dell'equazione lineare omogenea del second'ordine siano linearmente indipendenti è considerarne il seguente determinante, detto *Wronskiano*,

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

Vale il seguente

Teorema. *Due soluzioni y_1, y_2 sono linearmente indipendenti in un intervallo I se e solo se esiste $x_0 \in I$ tale che $W(x_0) \neq 0$.*

Dimostrazione. Osserviamo che l'enunciato del teorema è equivalente al seguente: y_1, y_2 sono linearmente dipendenti in I se e solo se $W(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Supponiamo allora y_1, y_2 linearmente dipendenti; allora, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $y_2(x) = cy_1(x)$ per ogni $x \in I$. Calcolando il Wronskiano si ottiene $W(x) = cy_1(x)y_1'(x) - cy_1(x)y_1'(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Supponiamo viceversa $W(x) = 0$ per ogni x. Di conseguenza, fissato $x_0 \in I$, il sistema

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

ha una soluzione $(\bar{c}_1, \bar{c}_2) \neq (0,0)$. Perciò, le due funzioni $\bar{y}(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x)$ e $\tilde{y}(x) \equiv 0$ risolvono entrambe un problema di Cauchy con le condizioni iniziali $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ e quindi, per l'unicità della soluzione, coincidono in I, da cui y_1 e y_2 sono linearmente dipendenti. $\square$

Esempio. Usando il teorema precedente verifichiamo che le funzioni $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$, dove λ_1 e λ_2 sono due numeri reali distinti, sono linearmente indipendenti. Si ha infatti

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \, e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \, e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}$$

Ponendo $x_0 = 0$ si ottiene

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

Studiamo ora in dettaglio il caso di un'equazione lineare del second'ordine a **coefficienti costanti** con termine noto che supporremo per semplicità di classe C^∞ in un intervallo aperto I di $\mathbb{R}$, ossia consideriamo un'equazione della forma

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)\,,$$

con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ e $b : I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞.

In base al teorema precedente, il problema di risolvere l'equazione lineare presa in esame si scinde in due sottoproblemi:

1) risolvere l'equazione omogenea associata;

2) trovare almeno una soluzione dell'equazione non omogenea.

Cominciamo perciò col **risolvere l'equazione omogenea associata.**

Il risultato che segue è una facile conseguenza dei teoremi di esistenza e unicità. Per brevità ne omettiamo la dimostrazione.

Teorema (della dimensione). *L'insieme delle soluzioni (massimali) di un'equazione differenziale omogenea di ordine* 2 *a coefficienti costanti (o, più in generale, a coefficienti di classe C^∞) è un sottospazio vettoriale* 2*-dimensionale di $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Il teorema che segue descrive l'integrale generale dell'equazione omogenea e non è altro che una riformulazione del Teorema della dimensione.

Teorema. *Le soluzioni massimali dell'equazione differenziale lineare omogenea*

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

sono della forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

dove c_1 e c_2 sono coefficienti in $\mathbb{R}$, e y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Osservazione. È facile verificare che l'applicazione $L\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ definita da

$$Ly = y'' + a_1 y' + a_0 y$$

è lineare e che il suo nucleo, $\ker L$, non è altro che lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea. Il teorema della dimensione afferma perciò che $\ker L$ è uno spazio di dimensione 2.

Torniamo al problema di risolvere l'equazione omogenea associata ad una equazione lineare del second'ordine a coefficienti costanti. Come osservato in precedenza, il problema di trovare **tutte** le soluzioni dell'equazione omogenea è ricondotto (per il teorema della dimensione) a quello di trovarne **due** linearmente indipendenti.

Un ruolo fondamentale nella ricerca di due soluzioni linearmente indipendenti è giocato dal *polinomio caratteristico*

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

associato all'equazione omogenea.

Il seguente risultato fornisce una regola pratica per trovare due soluzioni linearmente indipendenti di un'equazione differenziale omogenea del second'ordine a coefficienti costanti. La sua dimostrazione risulta chiara se si introduce il concetto di soluzione complessa di un'equazione differenziale lineare, cosa che faremo subito dopo i quattro esempi seguenti.

Teorema (risoluzione delle equazioni differenziali del second'ordine lineari, omogenee, a coefficienti costanti). *Sia $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ un'equazione omogenea del second'ordine a coefficienti (reali) costanti. Se il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ ha due radici reali e distinte λ_1 e λ_2, allora $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale. Se $P(\lambda)$ ha una radice doppia $\hat\lambda$, allora due soluzioni linearmente indipendenti sono $e^{\hat\lambda x}$ e $xe^{\hat\lambda x}$. Se $P(\lambda)$ ha una radice complessa $\alpha + i\beta$ (con $\beta \neq 0$) allora ammette anche la radice coniugata $\alpha - i\beta$, e le funzioni reali $e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x$ sono due soluzioni linearmente indipendenti.*

Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' - y = 0\,.$$

Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$ che ha le due radici reali e distinte $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Pertanto ogni soluzione dell'equazione è del tipo

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}\,,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + y = 0\,.$$

Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ che ha la sola radice (di molteplicità due) $\hat{\lambda} = 1$. Pertanto ogni soluzione dell'equazione è del tipo

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x\,,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

2^a **settimana - 3-4.10.19**

Esempio (equazione del moto armonico). Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + \omega^2 y = 0\,,\ \omega > 0\,.$$

Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ che ha le due radici complesse e coniugate $-i\omega$ e $+i\omega$. Pertanto, ogni soluzione è del tipo

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x\,,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Da elementari considerazioni di trigonometria si deduce facilmente che ogni soluzione può essere scritta anche nella forma

$$y(x) = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi)\,,$$

dove le costanti reali $A \geq 0$ e φ (dette, rispettivamente, *ampiezza* e *fase* della oscillazione) sono arbitrarie e ω (detta *pulsazione*) è assegnata.

Esempio (equazione delle oscillazioni smorzate). Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + 2\epsilon y' + \omega^2 y = 0\,,$$

dove $0 < \epsilon < \omega$. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\epsilon\lambda + \omega^2$, le cui radici sono $-\epsilon \pm i\sqrt{\omega^2 - \epsilon^2}$. Dunque la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 e^{-\epsilon x} \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \epsilon^2}\, x\right) + c_2 e^{-\epsilon x} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2 - \epsilon^2}\, x\right)$$

o, equivalentemente come osservato nell'esempio precedente, da

$$y(x) = A e^{-\epsilon x} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2 - \epsilon^2}\, x + \varphi\right)\,,$$

dove A e φ sono costanti arbitrarie.

============================

Cenno alle soluzioni complesse delle equazioni differenziali lineari omogenee.

Per lo studio delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti è opportuno introdurre uno spazio più ampio di $C^\infty(\mathbb{R})$, cioè lo spazio vettoriale $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ costituito dalle funzioni di classe C^∞ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$. Una funzione z di tale spazio si scrive nella forma $z(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ dove α e β, dette rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* della funzione $z(x)$, appartengono a $C^\infty(\mathbb{R})$. La *derivata* di z è la funzione $z'(x) = \alpha'(x) + i\beta'(x)$, e quindi appartiene ancora allo spazio $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Ovviamente, ogni funzione di $C^\infty(\mathbb{R})$ può essere pensata anche in $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (con parte immaginaria nulla).

Si fa notare che le funzioni di $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, non solo si possono moltiplicare per dei numeri reali, ma anche per dei numeri complessi, ottenendo ancora delle funzioni di classe C^∞ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$. Per questo motivo si usa dire che $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è uno *spazio vettoriale sui complessi* (o uno *spazio complesso*) e gli elementi di $\mathbb{C}$ rappresentano gli *scalari* dello spazio. In maniera analoga a quanto fatto in $C^\infty(\mathbb{R})$, si può introdurre la nozione di funzioni linearmente indipendenti per gli elementi di $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Una volta introdotto lo spazio $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, diremo che una funzione $z \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è una *soluzione complessa* dell'equazione a coefficienti costanti se

$$z''(x) + a_1 z'(x) + a_0 z(x) = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio. Siano $z(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ e $\bar{z}(x) = \alpha(x) - i\beta(x)$ due funzioni complesse e coniugate di $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Allora si ha

$$\frac{z(x) + \bar{z}(x)}{2} = \alpha(x) \quad \text{e} \quad \frac{z(x) - \bar{z}(x)}{2i} = \beta(x)\,.$$

Dedurre da ciò che se z e $\bar{z}$ sono soluzioni di un'equazione differenziale omogenea, allora lo sono anche α e β (notiamo esplicitamente che $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono funzioni reali).

Esercizio. Provare che se λ_1 e λ_2 sono due numeri complessi distinti, allora le funzioni $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono linearmente indipendenti (nello spazio $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).

Esercizio. Dato $\lambda \in \mathbb{C}$, provare che le funzioni $e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$ sono linearmente indipendenti (in $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).

Cerchiamo di illustrare con un esempio la definizione di soluzione complessa.

Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + y = 0\,.$$

Proviamo che essa ammette soluzioni complesse. Facciamo vedere che ammette soluzioni del tipo $z(x) = e^{\mu x}$, dove μ è un numero complesso. Si ha $z'(x) = \mu e^{\mu x}$ e $z''(x) = \mu^2 e^{\mu x}$. Quindi $z(x)$ è soluzione se e solo se

$$(\mu^2 + 1)e^{\mu x} = 0\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

ossia (essendo $e^{\mu x} \neq 0$) se e solo se $\mu^2 + 1 = 0$, da cui si ricava $\mu = \pm i$. Pertanto e^{ix} e e^{-ix} sono soluzioni dell'equazione differenziale considerata, e sono le uniche del tipo $e^{\mu x}$. Si osservi che non solo

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

sono soluzioni dell'equazione in esame, ma lo è anche $z(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}$ qualunque siano $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Ciò dipende dal fatto che l'equazione $y'' + y = 0$ è lineare omogenea, e quindi (come è facile verificare) la somma di due soluzioni è ancora una soluzione e se si moltiplica una soluzione per una costante si ottiene ancora una soluzione. L'insieme delle soluzioni dell'equazione $y'' + y = 0$ è dunque uno spazio vettoriale. È facile verificare che questo fatto è vero per una qualunque equazione differenziale lineare omogenea di ordine n.

Torniamo dall'esempio al caso generale. Una semplice verifica mostra che la funzione complessa $z(x) = e^{\mu x}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ se e solo se μ è radice del polinomio, detto **polinomio caratteristico**,

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

(ossia, se e solo se $\mu^2 + a_1 \mu + a_0 = 0$).

Prendiamo allora in esame le radici (in $\mathbb{C}$) del polinomio caratteristico. Osserviamo esplicitamente che, essendo il polinomio che stiamo considerando a coefficienti reali (infatti abbiamo supposto $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$), se esso ha una radice complessa $\alpha + i\beta$, allora necessariamente ha anche la coniugata $\alpha - i\beta$. Il polinomio è di secondo grado; perciò i casi che si possono presentare sono i seguenti:

- $P(\lambda)$ ha due radici reali e distinte λ_1, λ_2. Allora le due funzioni $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sono soluzioni dell'equazione differenziale e, per quanto osservato in precedenza, sono linearmente indipendenti. In questo caso ogni soluzione (complessa) y dell'equazione differenziale è della forma

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

  con c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$. In particolare, se c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ si ottengono tutte le soluzioni reali.

- $P(\lambda)$ ha un'unica radice reale $\hat{\lambda}$ (ovviamente) con molteplicità due. Allora le due funzioni $y_1(x) = e^{\hat{\lambda} x}$ e $y_2(x) = x e^{\hat{\lambda} x}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione. In questo caso ogni soluzione complessa [reale] y dell'equazione differenziale è della forma

$$y(x) = c_1 e^{\hat{\lambda} x} + c_2 x e^{\hat{\lambda} x}\,,$$

  con c_1, $c_2 \in \mathbb{C}\,[c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}]$.

- $P(\lambda)$ ha due radici complesse e coniugate $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$. Allora le funzioni $e^{(\alpha+i\beta)x}$ e $e^{(\alpha-i\beta)x}$ sono due soluzioni complesse dell'equazione differenziale e (vedi esercizio) sono linearmente indipendenti. In questo caso ogni soluzione complessa y dell'equazione differenziale è della forma

  $$y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

  con c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$. D'altra parte, usando le formule di Eulero e tenendo conto che l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare è uno spazio vettoriale, si ottiene che l'equazione ammette anche come soluzioni le due funzioni reali $e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$. Si può provare che anch'esse sono linearmente indipendenti. In particolare, perciò, tutte le soluzioni reali dell'equazione sono della forma

  $$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)\,,$$

  con c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Fine cenni sulle soluzioni complesse.

====================

Una volta trovato l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea, possiamo passare al secondo problema che avevamo da risolvere cioè quello di determinare almeno **una soluzione dell'equazione non omogenea**, la cosiddetta soluzione particolare.

Il metodo generale per determinare una soluzione particolare di un'equazione lineare (anche non a coefficienti costanti) è il metodo di variazione delle costanti che illustreremo nel seguito. Quando però l'equazione differenziale è a coefficienti costanti e quando il termine noto è di un certo tipo, si può usare un metodo più rapido per trovare una soluzione della non omogenea. Il metodo consiste nel cercare una soluzione in una classe di funzioni dello stesso tipo del termine noto. C'è un motivo teorico che giustifica questo procedimento, ma lo spiegarlo esula dai nostri scopi. In questi appunti perciò il metodo che descriveremo costituisce semplicemente una "regola pratica".

Supponiamo pertanto che il termine noto sia della forma

$$b(x) = e^{\alpha x}(p(x) \cos \beta x + q(x) \operatorname{sen} \beta x)\,,$$

dove α e β sono due numeri reali (eventualmente nulli), mentre $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi (eventualmente di grado zero, cioè costanti). Si potrebbe dimostrare che, in questo caso, otteniamo una soluzione particolare ancora dello stesso tipo. Per decidere in che forma cercarla è fondamentale il ruolo giocato dal numero complesso $\alpha + i\beta$.

Impariamo, innanzi tutto, a riconoscere quando il termine noto $b(x)$ si presenta in una di tali forme e a determinarne il corrispondente numero $\lambda = \alpha + i\beta$. Ecco alcuni esempi:

$b(x)$	$\alpha + i\beta$	$p(x)$	$q(x)$
$\operatorname{sen} x$	i	0	1
$x^2 e^{-2x}$	-2	x^2	0
-3	0	-3	0
$-e^x \cos 2x$	$1 + 2i$	-1	0
$xe^{-2x} \operatorname{sen} \pi x$	$-2 + \pi i$	0	x
$x^3 - x$	0	$x^3 - x$	0
$2e^x$	1	2	0
$2 \operatorname{sen} \omega x - x \cos \omega x$	$i\omega$	$-x$	2

Regola pratica (per determinare una soluzione particolare). Supponiamo che il termine noto $b(x)$ sia del tipo

$$e^{\alpha x}\big(p(x) \cos \beta x + q(x) \operatorname{sen} \beta x\big) ,$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono due polinomi di grado k_1 e k_2 rispettivamente (non occorre che abbiano lo stesso grado) e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Se $\alpha + i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico, allora si cerca una soluzione particolare della forma

  $$e^{\alpha x}\big(r(x) \cos \beta x + s(x) \operatorname{sen} \beta x\big) ,$$

  dove $r(x)$ e $s(x)$ sono polinomi di grado $k = \max\{k_1, k_2\}$, i cui coefficienti sono da determinare.

- Se $\alpha + i\beta$ è radice semplice del polinomio caratteristico, allora si cerca una soluzione moltiplicando per x la forma relativa al caso precedente.

- Se $\alpha + i\beta$ è radice doppia del polinomio caratteristico, allora si cerca una soluzione moltiplicando per x^2 la forma relativa al primo caso (cioè quella in cui $\alpha + i\beta$ non è radice).

In tutti i casi si tratta perciò di determinare i coefficienti dei polinomi r e s. Come già detto sopra, si potrebbe dimostrare che ciò è sempre possibile.

Illustriamo ora con qualche esempio l'applicazione di questo metodo.

Esempio. Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - y = 2e^{3x}\,.$$

Il polinomio caratteristico ha le due radici reali $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Poiché $\alpha = 3$ non è una di tali radici, cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea nella forma (si ha $\beta = 0$, $p(x) \equiv 2$)

$$\bar{y}(x) = ae^{3x}\,, a \in \mathbb{R}\,.$$

Derivando e sostituendo nell'equazione si ottiene

$$9ae^{3x} - ae^{3x} = 2e^{3x}\,,$$

che porta all'equazione algebrica (lineare) $8a = 2$. In conclusione, si ricava

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{4}e^{3x}\,.$$

Se consideriamo invece l'equazione

$$y'' - y = e^{x}\,,$$

ci troviamo nel caso in cui $\alpha = 1$ è radice semplice del polinomio caratteristico. Cerchiamo perciò

$$\bar{y}(x) = axe^{x}\,, a \in \mathbb{R}\,.$$

Con calcolo analogo al precedente, si ottiene

$$2ae^{x} + axe^{x} - axe^{x} = e^{x}\,,$$

da cui $2ae^{x} = e^{x}$ e quindi $a = 1/2$.

Consideriamo infine l'equazione

$$y'' - y = (x+3)e^{x}\,.$$

Questa volta il polinomio p non è costante ma è il polinomio di primo grado $p(x) = x + 3$. Si pone perciò

$$\bar{y}(x) = x(ax+b)e^{x},\ a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Derivando e sostituendo si ha

$$(2ax + 2a + b)e^{x} + (ax^2 + 2ax + bx + b)e^{x} - x(ax+b)e^{x} = (x+3)e^{x}\,,$$

da cui si ottiene il sistema lineare nelle due incognite a e b

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2a + 2b = 3 \end{cases}$$

che ha per soluzione $a = 1/4$ e $b = 5/4$.

Esempio. Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^x \,.$$

In questo caso, $\alpha = 1$ è radice di molteplicità 2 del polinomio caratteristico. Ponendo

$$\bar{y}(x) = ax^2 e^x,\ a \in \mathbb{R},$$

e sostituendo, si ricava

$$\bar{y}(x) = (1/2)x^2 e^x \,.$$

Esempio. Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + y = 2e^{3x} \cos x \,.$$

Poiché $3 + i$ non è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione della non omogenea nella forma

$$\bar{y}(x) = e^{3x}(a \cos x + b \operatorname{sen} x)\,, a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Procedendo come in precedenza, si ottiene il seguente sistema algebrico nell'incognite a e b

$$\begin{cases} 9a + 6b = 2 \\ -6a + 9b = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzione $a = 2/13$ e $b = 4/39$. Si ha perciò

$$\bar{y}(x) = e^{3x}\left(\frac{2}{13} \cos x + \frac{4}{39} \operatorname{sen} x\right).$$

Un esempio importante è il seguente

Oscillatore armonico con termine forzante, senza o con risonanza

Consideriamo l'equazione non omogenea

$$y'' + \omega^2 y = \operatorname{sen} \beta x \,,$$

dove ω e β sono costanti positive. Come abbiamo visto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x \,.$$

Supponiamo $\beta \neq \omega$. In questo caso, poiché βi non Ce radice del polinomio caratteristico, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea si può cercare nella forma

$$\bar{y}(x) = a \cos \beta x + b \operatorname{sen} \beta x \,.$$

Svolgendo i calcoli si trova $a = 0$ e $b = 1/(\omega^2 - \beta^2)$ e quindi l'integrale generale dell'equazione considerata è

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x + \frac{\operatorname{sen} \beta x}{\omega^2 - \beta^2} \,.$$

Quando $\beta = \omega$ si dice che c'è *risonanza*. L'equazione non omogenea diventa perciò

$$y'' + \omega^2 y = \operatorname{sen} \omega x$$

ed essendo ωi radice di molteplicità 1 del polinomio caratteristico una soluzione particolare è della forma

$$\bar{y}(x) = x(a \cos \omega x + b \operatorname{sen} \omega x) \,.$$

Derivando due volte e sostituendo si ottiene $a = -1/(2\omega)$ e $b = 0$. Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione nel caso di risonanza risulta

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x - x \frac{\cos \omega x}{2\omega} \,.$$

Osserviamo che in presenza di risonanza le soluzioni risultano sempre **non limitate** a causa del fattore x. Si dice che si ha una *vibrazione forzata*.

È possibile determinare una soluzione particolare dell'equazione $y'' + \omega^2 y = \operatorname{sen} \omega x$ anche per altra via.
Fra tutte le soluzioni dell'equazione non in risonanza, cioè tra tutte le soluzioni della forma $c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x + \frac{\operatorname{sen} \beta x}{\omega^2 - \beta^2}$, scegliamo la soluzione y_β che soddisfa le condizioni iniziali $y_\beta(0) = y'_\beta(0) = 0$. Calcolando le costanti c_1 e c_2 otteniamo $c_1 = 0$ e $c_2 = -\frac{\beta}{\omega(\omega^2 - \beta^2)}$, da cui

$$y_\beta(x) = \frac{\beta \operatorname{sen} \omega x - \omega \operatorname{sen} \beta x}{\omega(\beta^2 - \omega^2)} \,.$$

Questa soluzione è definita per ogni valore $\beta \neq \omega$; possiamo però cercare di calcolare (se esiste) il limite per β tendente a ω di y_β. Si ha

$$\lim_{\beta\to\omega} y_\beta(x) = \lim_{\beta\to\omega} \frac{\beta \operatorname{sen}\omega x - \omega \operatorname{sen}(\beta x)}{\omega(\beta^2-\omega^2)} = \frac{1}{2\omega^2} \lim_{\beta\to\omega} \frac{\beta \operatorname{sen}\omega x - \omega \operatorname{sen}(\beta x)}{\beta-\omega}$$

Applicando la regola di de l'Hôpital si trova, derivando rispetto a β,

$$\lim_{\beta\to\omega} y_\beta(x) = \frac{1}{2\omega^2} \lim_{\beta\to\omega} \frac{\operatorname{sen}\omega x - x\omega\cos\beta x}{1} = \frac{\operatorname{sen}\omega x - x\omega\cos\omega x}{2\omega^2} = y_\omega(x)$$

Con un calcolo diretto si può verificare che la funzione

$$y_\omega = \frac{\operatorname{sen}\omega x}{2\omega^2} - x\frac{\cos\omega x}{2\omega}$$

soddisfa l'equazione $y''+\omega^2 y = \operatorname{sen}\omega x$ (e le condizioni iniziali $y_\omega(0) = y'_\omega(0) = 0$). Inoltre, essendo la funzione $\frac{\operatorname{sen}\omega x}{2\omega^2}$ soluzione dell'equazione omogenea, si riottiene la soluzione $-x\frac{\cos\omega x}{2\omega}$ della non omogenea, già trovata sopra in altro modo.

Esempio. Tra tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' = xe^{-x},$$

determinare quella che verifica le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Si tratta perciò di risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = xe^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata è $y'' = 0$ e il suo polinomio caratteristico, $P(\lambda) = \lambda^2$, ha due radici coincidenti: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$. Quindi, la soluzione generale dell'equazione omogenea è $u(x) = c_1 + c_2 x$. Occorre trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Osserviamo che $\alpha = -1$ non è radice del polinomio caratteristico. Si cerca quindi una soluzione del tipo $\bar{y}(x) = (ax+b)e^{-x}$. Si ha

$$\bar{y}''(x) = (b-2a)e^{-x} + axe^{-x}.$$

Quindi $\bar{y}(x)$ è soluzione se (e solo se) è verificata la condizione

$$(b-2a)e^{-x} + (a-1)xe^{-x} = 0\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

ossia se (e solo se) $b - 2a = 0$ e $a - 1 = 0$ (per quanto riguarda il “solo se”, anche se non ci interessa, ricordarsi che le funzioni e^{-x} e xe^{-x} sono linearmente indipendenti). La funzione $\bar{y}(x) = (x + 2)e^{-x}$ è dunque una soluzione dell'equazione non omogenea. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione in esame è

$$y(x) = c_1 + c_2 x + (x + 2)e^{-x} .$$

Determiniamo ora c_1 e c_2 in modo che siano soddisfatte le condizioni assegnate. Si ha $y'(x) = c_2 + e^{-x} - (x + 2)e^{-x}$, e quindi $y(0) = c_1 + 2$ e $y'(0) = c_2 - 1$. Ponendo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ si ricava $c_1 = -2$ e $c_2 = 1$. Dunque, la soluzione che verifica il problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = -2 + x + (x + 2)e^{-x}.$$

Esercizio. Provare che una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1(x) + b_2(x)$$

si può ottenere sommando una soluzione di $y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1(x)$ con una soluzione di $y'' + a_1 y' + a_0 y = b_2(x)$.

Esempio. Troviamo tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'' + 9y = \operatorname{sen} 3x + e^x .$$

Il polinomio caratteristico ha le due radici complesse (e coniugate) $3i$ e $-3i$. La soluzione dell'equazione omogenea è perciò $c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$. Per l'esercizio precedente per determinare una soluzione dell'equazione non omogenea possiamo cercare separatamente una soluzione particolare $\bar{y}_1$ di $y'' + 9y = \operatorname{sen} 3x$ e una $\bar{y}_2$ di $y'' + 9y = e^x$ e poi sommarle. Cerchiamo $\bar{y}_1$ nella forma (si ha $\alpha = 0\,, \beta = 3\,, p(x) \equiv 0\,, q(x) \equiv 1$)

$$\bar{y}_1(x) = x(a \cos 3x + b \operatorname{sen} 3x)\,, a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Si trova $a = -(1/6)$ e $b = 0$, da cui $\bar{y}_1(x) = -(1/6)x \cos 3x$. Cerchiamo ora $\bar{y}_2$ nella forma (si ha $\alpha = 1\,, \beta = 0\,, p(x) \equiv 1$)

$$\bar{y}_2(x) = ae^x\,, a \in \mathbb{R}\,.$$

Si trova $a = (1/10)$ e quindi $\bar{y}_2(x) = (1/10)e^x$. In definitiva, l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{6}\, x \cos 3x + \frac{1}{10} e^x\,, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Nel caso in cui il termine noto b dell'equazione differenziale non sia del tipo considerato sopra, per trovare una soluzione particolare si usa il metodo di **variazione delle costanti**. Come già osservato per le equazioni del prim'ordine, il metodo consiste nel cercare una soluzione dell'equazione non omogenea, pensando "variabili" le costanti c_1 e c_2 che compaiono nell'integrale generale dell'omogenea. In altre parole, si cerca una soluzione dell'equazione non omogenea nella forma

$$\bar{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

dove y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea.

Derivando, si ottiene

$$\bar{y}'(x) = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x)\,.$$

Imponendo la condizione $c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$ e derivando una seconda volta si ha

$$\bar{y}''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2''(x)\,.$$

Sostituendo le espressioni trovate nell'equazione si ottiene

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2''(x) +$$

$$a_1(c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)) + a_0(c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x))\,,$$

da cui, tenendo conto che y_1 e y_2 sono soluzioni dell'omogenea, si ricava

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = b(x)\,.$$

Perciò $\bar{y}$ è soluzione dell'equazione differenziale se risolve il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = b(x)\,. \end{cases}$$

Questo sistema ha sempre una e una sola soluzione $c_1'(x)\,, c_2'(x)$ (dipende dal fatto che y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti) data da

$$c_1'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ b(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}}\,, \quad c_2'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & b(x) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}}$$

A questo punto, prendendo delle primitive di c_1' e di c_2' , si ricava l'espressione della soluzione $\bar{y}$.

Nei due esempi che seguono si applica il metodo di variazione delle costanti.

Esempio. Consideriamo l'equazione

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}\,.$$

Ovviamente le soluzioni massimali sono definite negli intervalli tra due zeri successivi del coseno. Per semplicità, restringiamoci all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$c_1\, \cos x + c_2\, \operatorname{sen} x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Cerchiamo una soluzione particolare nella forma

$$\bar{y}(x) = c_1(x)\, \cos x + c_2(x)\, \operatorname{sen} x\,.$$

Si ottiene il sistema nelle incognite $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$

$$\begin{cases} c_1'(x)\, \cos x + c_2'(x)\, \operatorname{sen} x = 0 \\ -c_1'(x)\, \operatorname{sen} x + c_2'(x)\, \cos x = \frac{1}{\cos x}\,. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $\operatorname{sen} x$, la seconda per $\cos x$ e sommando si ottiene $c_2'(x) = 1$ da cui, sostituendo nella prima equazione,

$$c_1'(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,.$$

Integrando e ricordando che $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, si ricava

$$c_1(x) = \log \cos x\,, \quad c_2(x) = x\,.$$

Pertanto, una soluzione particolare è

$$\bar{y}(x) = (\log \cos x)\, \cos x + x \operatorname{sen} x\,.$$

Esempio. Consideriamo l'equazione

$$y'' - y = \frac{1}{x}\,.$$

Ovviamente le soluzioni sono definite o per $x > 0$ o per $x < 0$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Cerchiamo una soluzione particolare nella forma

$$\bar{y}(x) = c_1(x)\, e^x + c_2(x)\, e^{-x}\,.$$

Si ottiene il sistema nelle incognite $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^x + c_2'(x)\, e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)\, e^x - c_2'(x)\, e^{-x} = \frac{1}{x}\,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ricava

$$c_1'(x) = \frac{e^{-x}}{2x}, \quad c_2'(x) = -\frac{e^x}{2x}\,,$$

per cui una soluzione particolare è

$$\bar{y}(x) = e^x \int \frac{e^{-x}}{2x}\,dx - e^{-x} \int \frac{e^x}{2x}\,dx\,.$$

Osserviamo che le funzioni $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ trovate in questo esempio non hanno primitiva che si possa esprimere a partire da alcune funzioni elementari ($c \in \mathbb{R}$, x, $\operatorname{sen} x$, $\log x$, $\operatorname{sign} x$, $[x]$) con un **numero finito** di operazioni di somma, prodotto, quoziente, composizione, restrizione ad un intervallo e inversione. Si dice che esse non hanno *primitiva elementare* (ricordarsi le osservazioni fatte nelle lezioni su integrali indefiniti e primitive). Un modo per esprimere gli integrali precedenti è quello di "calcolarli per serie" facendo uso dello sviluppo in serie di potenze della funzione esponenziale. Calcoliamo, ad esempio, $\int \frac{e^x}{x}\,dx$ per $x > 0$. Si ha

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,dx = \int \Big(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}\Big)\,dx = \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,n} + k_1,\ k_1 \in \mathbb{R},$$

avendo usato nell'ultimo passaggio la proprietà che le serie di potenze sono integrabili termine a termine (vedi i richiami sulle serie di potenze nelle pagine seguenti).

Esempio. Consideriamo l'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = e^{-3x} \log(1 + x^2).$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$c_1\, e^{-3x} + c_2\, xe^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Cerchiamo una soluzione particolare nella forma

$$\bar{y}(x) = c_1(x)\, e^{-3x} + c_2(x)\, xe^{-3x}\,.$$

Si ottiene il sistema nelle incognite $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^{-3x} + c_2'(x)\, xe^{-3x} = 0 \\ -3c_1'(x)\, e^-3x + c_2'(x)\,(1-3x)e^{-3x} = e^{-3x}\, \log(1+x^2)\,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ricava

$$c_1'(x) = -x\, \log(1+x^2), \quad c_2'(x) = \log(1+x^2),$$

da cui, integrando per parti,

$$c_1(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1)\, \log(1+x^2) + \frac{1}{2}x^2,$$

$$c_2(x) = x\log(1+x^2) - 2x + +2\,\mathrm{arctang}\, x.$$

Torniamo ora al **caso generale** dell'equazione lineare del second'ordine non omogenea

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)\,,$$

dove a_0, a_1 e b sono **funzioni continue** in un intervallo I. In base al Teorema della dimensione, per risolvere l'equazione omogenea dobbiamo trovare due soluzioni linearmente indipendenti. Illustreremo alcuni casi in cui questo si riesce a fare.

Equazione di Eulero

Un esempio importante di equazione differenziale a coefficienti continui è *l'equazione di Eulero (del second'ordine)*:

$$x^2y'' + cxy' + dy = b(x), \quad x > 0,$$

dove c, d sono costanti reali e supponiamo, per semplicità, b continua almeno in $(0,+\infty)$.

Sia $y(x)$ una soluzione dell'equazione e poniamo $x = e^s$ o, equivalentemente, $s = \log x$. Ponendo $\varphi(s) = y(e^s)$ e sostituendo nell'equazione differenziale, otteniamo

$$e^{2s}y''(e^s) + ce^sy'(e^s) + de^s = b(e^s).$$

Si ha

$$\varphi'(s) = y'(e^s)e^s, \text{ da cui } y'(e^s) = e^{-s}\varphi'(s)$$

e

$$\varphi''(s) = y''(e^s)e^{2s} + y'(e^s)e^s, \text{ da cui } y''(e^s) = e^{-2s}(\varphi''(s) - \varphi'(s)).$$

Sostituendo si ottiene la seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea

$$\varphi''(s) + (c-1)\varphi'(s) + d\varphi(s) = b(e^s),$$

dalla quale possiamo ricavare $\varphi(s)$ e, di conseguenza, $y(x)$ ricordando che $s = \log x$.

Osservazione. Nel caso in cui si voglia risolvere l'equazione di Eulero per $x < 0$, si usa il cambiamento di variabile $x = -e^s$.

Esempio. Troviamo la soluzione generale dell'equazione

$$x^2y'' + 3xy' + y = x, \quad x > 0.$$

Per quanto visto sopra ci si riconduce all'equazione a coefficienti costanti

$$\varphi''(s) + 2\varphi'(s) + \varphi(s) = e^s,$$

la cui soluzione generale è data da

$$\varphi(s) = c_1e^{-s} + c_2se^{-s} + \frac{1}{4}e^s,$$

come è facile verificare. Ponendo $s = \log x$, si ottiene

$$y(x) = c_1\frac{1}{x} + c_2\frac{\log x}{x} + \frac{1}{4}x.$$

Esercizio. Risolvere le seguenti equazioni di Eulero

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \log x, \quad x^2y'' + xy' + y = x^2, \quad x^2y'' + xy' - y = \frac{x}{1+x}.$$

Per risolvere l'equazione di Eulero omogenea

$$x^2y'' + cxy' + dy = 0, \quad x > 0,$$

si può procedere anche nel modo seguente. Cerchiamo una soluzione nella forma $y(x) = x^k$. Derivando due volte e sostituendo si ottiene

$$x^k(k(k-1) + ck + d) = 0, \quad x > 0.$$

Perciò x^k è soluzione se e solo se

$$k^2 + (c-1)k + d = 0.$$

Poniamo $\Delta = (c-1)^2 - 4d$. Si possono verificare tre casi:

1. $\Delta > 0$. In questo caso i due numeri reali e distinti $k_{1,2} = \frac{1-c\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ danno luogo a due soluzioni x^{k_1} e x^{k_2}, che si verifica subito essere linearmente indipendenti.

2. $\Delta = 0$. In questo caso c'è un'unica soluzione reale $k = \frac{1-c}{2}$ dell'equazione algebrica che fornisce la soluzione $y_1(x) = x^k$. Un'altra soluzione va cercata col metodo dell'abbassamento del grado dell'equazione differenziale (vedi dopo il metodo di d'Alembert). Proviamo che essa è data da $y_2(x) = v(x)x^k$ dove $v(x) = \log x$. Infatti, derivando due volte e sostituendo, si ottiene

   $$x^{k+2}v''(x) + (2k+c)x^{k+1}v'(x) + (k(k-1) + ck + d)x^k v(x) = 0.$$

   Come già visto sopra, l'ultimo addendo è uguale a zero per ogni $x > 0$, essendo x^k soluzione dell'equazione differenziale. Inoltre, dividendo per x^{k+1} e tenendo conto che $2k + c = 1$, si ottiene che $v(x)$ è soluzione dell'equazione $xv'' + v' = 0$, che si può risolvere "abbassandola" di grado poiché non dipende esplicitamente da v. L'integrale generale di tale equazione è $v(x) = c_1 \log x + c_2$ che prova (prendendo in particolare $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$) quanto volevamo dimostrare.

3. $\Delta < 0$. In questo caso i due numeri complessi e coniugati $k_{1,2} = \frac{1-c\pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$ danno luogo a due soluzioni complesse x^{k_1} e x^{k_2}. Ricordiamo che valgono le formule di Eulero,

   $$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$
   $$e^{a-ib} = e^a(\cos b - i \operatorname{sen} b)$$

   da cui
   $$\frac{e^{a+ib} + e^{a-ib}}{2} = e^a \cos b\,; \quad \frac{e^{a+ib} - e^{a-ib}}{2i} = e^a \operatorname{sen} b\,.$$

   Di conseguenza, alle due soluzioni complesse si possono associare le due soluzioni reali $y_1(x) = x^{\frac{1-c}{2}} \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \log x)$ e $y_2(x) = x^{\frac{1-c}{2}} \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \log x)$, che sono linearmente indipendenti come si verifica facilmente.

Esempio. Usiamo il secondo metodo per trovare la soluzione generale dell'equazione

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad x > 0.$$

L'equazione algebrica è $k^2 - 5k + 6 = 0$ che ha come soluzioni $k_1 = 2$ e $k_2 = 3$. Di conseguenza la soluzione generale è $y(x) = c_1x^2 + c_2x^3$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio. Risolvere con il secondo metodo le seguenti equazioni di Eulero

$$x^2y'' + 5xy' - 5y = 0, \quad x^2y'' + xy' + 4y = 0.$$

Metodo di d'Alembert

Un'altra situazione in cui si riesce a risolvere l'equazione omogenea si ha quando, per qualche motivo, è nota una soluzione y_1 dell'equazione stessa. È possibile allora determinare un'altra soluzione linearmente indipendente da y_1 avente la forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$. Il metodo usato conduce ad abbassare l'ordine dell'equazione; viene chiamato anche *metodo di d'Alembert*. Illustriamolo con degli esempi.

Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale

$$\frac{x^2}{2}y'' - y = 0, \quad x > 0.$$

È immediato verificare che $y_1(x) = x^2$ è soluzione. Cerchiamo allora una seconda soluzione nella forma $y_2(x) = v(x)x^2$. Derivando due volte e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{x^4}{2}v'' + 2x^3 v = 0, \quad x > 0,$$

che, ponendo $z(x) = v'(x)$, si riduce all'equazione del prim'ordine lineare a coefficienti continui

$$z' + \frac{4}{x}z = 0,$$

da cui $z(x) = -\tilde{c}_1\frac{1}{x^4} = v'(x)$ e quindi $v(x) = -\tilde{c}_1\frac{1}{3x^3} + \tilde{c}_2$, con $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, prendendo ad esempio $v(x) = -\frac{1}{3x^3}$ (cioè ponendo $\tilde{c}_1 = 1$ e $\tilde{c}_2 = 0$), si ottiene $y_2(x) = v(x)x^2 = -\frac{1}{3x}$. La soluzione generale dell'equazione risulta quindi

$$y(x) = c_1x^2 - c_2\frac{1}{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x > 0.$$

L'equazione sopra è anche un'equazione di Eulero. Provare a risolverla con i metodi descritti in precedenza per l'equazione di Eulero.

3^a settimana - 10-11.10.19

Mostriamo un altro esempio di applicazione del metodo di d'Alembert.

Esempio [Equazione di Legendre (di ordine 1)].
Consideriamo l'equazione differenziale

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x \in (-1,1),$$

detta *equazione di Legendre (di ordine 1).* Le sue soluzioni si chiamano *funzioni di Legendre* e si incontrano, ad esempio, nella risoluzione in coordinate sferiche dell'equazione (alle derivate parziali) di Laplace. È facile verificare che $y_1(x) = x$ è soluzione dell'equazione. Ponendo $y_2(x) = v(x)x$ e sostituendo si ottiene $(x - x^3)v''(x) + 2(1-2x^2)v'(x) = 0$. Analogamente all'esempio precedente e ricordando i metodi di integrazione per le funzioni razionali fratte, si ottiene

$$v(x) = \tilde{c}_1\Big(\frac{1}{2}\log\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big| - \frac{1}{x}\Big) + \tilde{c}_2, \quad \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}, \quad 0 < |x| < 1,$$

da cui, prendendo $\tilde{c}_1 = 1$ e $\tilde{c}_2 = 0$, si ha

$$y_2(x) = v(x)x = \Big(\frac{x}{2}\log\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big| - 1\Big),$$

che è prolungabile anche in $x = 0$ ponendola uguale a -1.

Osservazione. Nel caso dell'equazione del second'ordine a coefficienti costanti $y'' + a_1y' + a_0y = 0$, quando il polinomio caratteristico ha una sola radice reale $\hat{\lambda} = -\frac{a_1}{2}$ (ovviamente di molteplicità 2), abbiamo visto che $y_1(x) = e^{\hat{\lambda}}x$ e $y_2(x) = xe^{\hat{\lambda}}x$ sono due soluzioni linearmente indipendenti. Verifichiamo che la soluzione y_2 è proprio quella data dal metodo di d'Alembert. Poniamo infatti $y_2(x) = v(x)e^{\hat{\lambda}}x$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione, si ottiene $v'' - \frac{1}{4}(a_1^2 - 4a_0)v = 0$, da cui, essendo $a_1^2 - 4a_0 = 0$, risulta $v'' = 0$. Di conseguenza $v(x) = \tilde{c}_1x + \tilde{c}_2$ da cui, scegliendo $\tilde{c}_1 = 1$ e $\tilde{c}_2 = 0$, si ha $v(x) = x$.

==============================

Richiami sulle serie di potenze e di Taylor

(presi dal mio corso di Analisi Matematica 2)

Serie di potenze

Una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \,,$$

dove x_0 e gli a_n sono numeri reali assegnati, si dice una *serie di potenze* in campo reale. Il punto x_0 si chiama *centro della serie.*

Una serie di potenze converge ovviamente in $x = x_0$ (e la sua somma in tal caso vale a_0).

Ricordiamo che una serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x)$ si dice che *converge totalmente* in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se esiste una serie numerica convergente $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n$ tale che $|f_n(x)| \leq c_n$, $\forall n \geq n_0$ e $\forall x \in A$. Se una serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente in un insieme A, allora (come conseguenza dei criteri di convergenza assoluta e del confronto per le serie numeriche) converge (assolutamente) per ogni $x \in A$ e, quindi, risulta ben definita la funzione somma

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x) \,.$$

Alcune proprietà importanti di una serie convergente totalmente (e, di conseguenza, anche uniformemente) sono raccolte nel teorema che segue.

Teorema. *Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni continue convergente totalmente in un insieme A e sia*

$$f(x) := \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x)$$

la somma della serie. Allora

i) (continuità) la funzione f risulta continua in A;

ii) (passaggio al limite sotto l'integrale) per ogni intervallo $[a, b] \subseteq A$ si ha $\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x)\,dx$;

iii) (derivabilità) se inoltre le funzioni f_n sono di classe C^1 in A e se la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'(x)$ delle derivate converge totalmente in A, allora f risulta di classe C^1 in A e si ha $f'(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'(x)$.

Torniamo ora al caso importante delle serie di potenze e vediamo cosa si può dire della loro convergenza. Si ha il seguente

Teorema. *Sia data la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Allora, o la serie converge solo in $x = x_0$, oppure esiste $R > 0$ (eventualmente anche infinito) tale che la serie converge assolutamente se $|x - x_0| < R$ e non converge se $|x - x_0| > R$. Inoltre la serie converge totalmente in ogni intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$, con $0 < r < R$.

Dal risultato precedente si deduce perciò che l'insieme di convergenza di una serie di potenze centrata in x_0 è un intervallo (aperto, chiuso o semiaperto) e che x_0 è equidistante dagli estremi (finiti o infiniti che siano). Osserviamo che non si può dire nulla a priori del comportamento della serie nei punti $x_0 - R$ e $x_0 + R$. Ad esempio: la serie $\sum_n \frac{x^n}{n}$ ha raggio di convergenza 1 e converge (non assolutamente) in $x = -1$ mentre non converge in $x = 1$; la serie $\sum_n \frac{x^n}{n^2}$ ha raggio di convergenza 1 e converge assolutamente sia in $x = 1$ che in $x = -1$; la serie $\sum_n nx^n$ ha raggio di convergenza 1 e non converge negli estremi dell'intervallo $(-1, 1)$ (il termine generale non tende a zero).

Definizione. La semiampiezza R dell'intervallo di convergenza di una serie di potenze si chiama *raggio di convergenza* della serie.

Per calcolare il raggio di convergenza, fissato $x \in \mathbb{R}$, si può ricorrere agli usuali criteri per le serie a termini positivi applicandoli alla serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |x - x_0|^n$, pensata come una serie numerica dipendente dal parametro x. Altrimenti, si può usare ad esempio il seguente

Teorema. *Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ e supponiamo che esista $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora si ha*

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

con la convenzione che $R = 0$ se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ e $R = +\infty$ se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$

Osservazione. Un altro criterio per il calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze si ottiene ricordando che se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, allora si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Esempio.

1. La serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$
ha raggio di convergenza $R = 1$.

2. La serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$
ha raggio di convergenza $R = 1/e$.

3. La serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
ha raggio di convergenza $R = +\infty$.

4. La serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$
ha raggio di convergenza $R = 0$.

Serie di Taylor

Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ e supponiamo che abbia raggio di convergenza $R > 0$. Allora è ben definita, nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$, la somma della serie, cioè una funzione f tale che

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)\,.$$

Teorema. *La funzione f definita dalla serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ è continua in ogni punto dell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$.*

Dimostrazione. Sia $\bar{x}$ un qualunque punto dell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$. Esiste un numero r, con $0 < r < R$, tale che l'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ contiene $\bar{x}$. Di conseguenza, poiché la serie è totalmente convergente in $[x_0 - r, x_0 + r]$, la funzione somma f è ivi continua. Questo implica, in particolare, che f è continua anche nel punto $\bar{x}$. $\square$

Vediamo altre proprietà delle serie di potenze.

Lemma (di invarianza del dominio di convergenza). *Supponiamo che la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

abbia raggio di convergenza $R > 0$. Allora le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

hanno raggio di convergenza R.

Il lemma precedente serve per provare che le serie di potenze sono "derivabili termine a termine" e "integrabili termine a termine"; si ha cioè il seguente

Teorema (di derivazione e integrazione delle serie di potenze). *Sia*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-R, x_0+R)$$

una funzione definita da una serie di potenze. Allora f è derivabile in $(x_0 - R, x_0 + R)$ e si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}\,.$$

Inoltre, per ogni $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ si ha

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Osservazione. Poiché la derivata di una serie di potenze è ancora una serie di potenze, dal teorema precedente segue che le funzioni definite tramite serie di potenze sono di classe C^∞.

Sia dunque

$$f(x) := a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

una funzione definita mediante una serie di potenze nell'intervallo (x_0-R, x_0+R). Ponendo $x = x_0$, si ottiene $a_0 = f(x_0)$. Derivando e ponendo di nuovo $x = x_0$, si ha $a_1 = f'(x_0)$. Analogamente, mediante derivate successive (vedi l'osservazione precedente), si ottiene

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \,.$$

Pertanto, risulta necessariamente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \, (x - x_0)^n \,,$$

dove $f^{(0)}(x_0)$ denota $f(x_0)$.

In altre parole, la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ coincide in $(x_0 - R, x_0 + R)$ con la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \, (x - x_0)^n,$$

che è detta *serie di Taylor di* f *di centro* x_0 (o di *MacLaurin*, quando $x_0 = 0$).

Il ragionamento precedente prova cioè che se una funzione è definita mediante una serie di potenze, essa risulta di classe C^∞ in x_0 e la sua serie di Taylor ha per somma la funzione stessa.

D'altra parte, data una funzione di classe C^∞ in x_0, si può considerare la serie di Taylor di f di centro x_0, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \, (x - x_0)^n \,.$$

Ci chiediamo:

1) se esista un intorno di x_0 nel quale questa serie sia convergente;

2) supposto che esista un tale intorno, se in esso la somma della serie sia proprio $f(x)$.

Definizione. Una funzione f si dice *sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di un punto* x_0 (o *analitica in* x_0) se esiste un intorno di x_0 in cui vale l'uguaglianza

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \, (x - x_0)^n \,.$$

Si dice che f è *analitica* se ogni punto del suo dominio ammette un intorno in cui f è sviluppabile in serie di Taylor (ossia, se è analitica in ogni punto del suo dominio).

Osservazione. Esistono funzioni di classe C^∞ ma non analitiche. Una di queste è

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

le cui derivate successive (come si potrebbe provare usando un corollario del teorema di Lagrange) risultano tutte continue e nulle nel punto $x_0 = 0$. Quindi, se f fosse analitica, in un intorno del punto $x_0 = 0$ dovrebbe valere l'uguaglianza

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \,,$$

e ciò è impossibile perché $f(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, mentre la sua serie di Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ha per somma zero (essendo nulli tutti i suoi termini).

Si ha la seguente condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia sviluppabile in serie di Taylor.

Teorema. *Una funzione f di classe C^∞ in x_0 è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno $(x_0 - R, x_0 + R)$ di x_0 se e solo se, per ogni $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, risulta $\lim_{n\to\infty} R_n(x - x_0) = 0$, dove*

$$R_n(x - x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

denota il resto n-esimo della formula di Taylor.

Esempio. La funzione $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di MacLaurin e tale serie ha raggio di convergenza $R = +\infty$. Fissiamo un punto $x \in \mathbb{R}$. Sappiamo che se e^x è effettivamente sviluppabile in serie di MacLaurin, allora si deve necessariamente avere

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \,.$$

Per il teorema precedente, ciò equivale ad affermare che

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} (e^x - P_n(x)) = 0 \,,$$

dove la somma parziale n-esima

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

non è altro che il polinomio di MacLaurin di e^x di ordine n. Scrivendo il resto $R_n(x)$ nella forma di Lagrange, si potrebbe facilmente far vedere che in effetti esso tende a 0 per $n \to +\infty$. Per l'arbitrarietà del punto x, possiamo concludere che lo sviluppo è valido in tutto $\mathbb{R}$.

Ponendo $x = 1$ nello sviluppo in serie di MacLaurin di e^x si ottiene il numero e espresso mediante una serie numerica:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,.$$

Mostriamo ora che la funzione e^x è analitica, cioè che è sviluppabile in serie di Taylor in ogni punto di $\mathbb{R}$ (facoltativo). A tale scopo fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e poniamo, per comodità, $x = x_0 + h$. Si ha

$$e^x = e^{x_0+h} = e^{x_0}e^h = e^{x_0}(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + \cdots) =$$

$$e^{x_0} + e^{x_0}h + e^{x_0}\frac{h^2}{2!} + \cdots + e^{x_0}\frac{h^n}{n!} + \cdots$$

Quindi

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + e^{x_0}\frac{(x - x_0)^n}{n!} + \cdots$$

Esercizio. In maniera analoga a quanto fatto per la funzione esponenziale, si può provare che le funzioni $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ sono sviluppabili in serie di MacLaurin. Determinarne lo sviluppo e l'intorno di validità.

Il metodo usato per sviluppare in serie di MacLaurin le funzioni e^x, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ (basato su una stima del resto della formula di Taylor) non è adatto per la funzione $f(x) = \log(1 + x)$. In questo caso conviene procedere diversamente:

1. si determina prima lo sviluppo della derivata $f'(x)$ di $f(x)$;

2. successivamente, mediante il teorema di integrazione termine a termine delle serie di potenze, si trova una primitiva dello sviluppo di $f'(x)$;

3. infine, tra tutte le primitive di $f'(x)$ espresse in serie di potenze, si sceglie quella che coincide con $f(x)$.

Tale metodo è adatto anche per determinare lo sviluppo di $\operatorname{arctang} x$ e, in generale, di tutte le funzioni di cui è facile sviluppare la derivata. A tale proposito ricordiamo che due primitive di una stessa funzione (definita in un intervallo) differiscono per una costante e, di conseguenza, se coincidono in un punto, coincidono in tutto l'intervallo di definizione.

Cominciamo col determinare, col metodo appena esposto, lo sviluppo di MacLaurin di $\log(1+x)$. La derivata $(1+x)^{-1}$ di $\log(1+x)$ rappresenta, per $x \in (-1,1)$, la somma di una serie geometrica di ragione $-x$ e primo termine 1. Quindi, per $x \in (-1,1)$, si ha

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

Dal teorema di derivazione delle serie di potenze si deduce che

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

è una primitiva di $(1+x)^{-1}$; ma, è bene precisare, soltanto per x appartenente al comune dominio di convergenza $(-1,1)$ delle due serie. Dunque, $\log(1+x)$ e $g(x)$ hanno la stessa derivata per $x \in (-1,1)$. Poiché coincidono per $x = 0$, si può concludere che

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad \forall x \in (-1,1)\,.$$

Esercizio. Provare che la funzione $\operatorname{arctang} x$ è sviluppabile in serie di MacLaurin, determinarne lo sviluppo e l'intervallo di validità.
Suggerimento. Sviluppare prima la derivata di $\operatorname{arctang} x$.

Esercizio. Provare che la funzione e^{-x^2} è sviluppabile in serie di MacLaurin, determinarne lo sviluppo e l'intervallo di validità.
Suggerimento. Si ricorda che l'uguaglianza

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

è valida per ogni numero reale x, e quindi, in particolare, è valida per ogni numero reale $-x^2$.

Esercizio. Provare che la funzione degli errori,

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt\,,$$

è sviluppabile in serie di MacLaurin, determinarne lo sviluppo e l'intervallo di validità.
Suggerimento. Sviluppare prima la derivata di $\operatorname{erf} x$.

Esercizio. Provare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

è sviluppabile in serie di MacLaurin, determinarne lo sviluppo e l'intervallo di validità.
Suggerimento. Sviluppare prima $\operatorname{sen} x$.

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ che è senz'altro definita e C^∞ nell'intervallo $(-1, +\infty)$. Si ha

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,,$$

per cui la serie di MacLaurin di f è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n\,,$$

ove ricordiamo che $\binom{\alpha}{n}$ è il *coefficiente binomiale*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \qquad \binom{\alpha}{0} = 1\,.$$

Si può provare che per $|x| < 1$ e qualunque sia α si ha

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n\,.$$

Questa serie di potenze è detta *serie binomiale*. Se α è un numero naturale la serie è una somma finita. Infatti si riduce alla somma dei primi $\alpha+1$ termini essendo i coefficienti binomiali tutti nulli per $n > \alpha$. In questo caso prende il nome di *binomio di Newton*.

Esercizio. Scrivere i primi quattro termini della serie di MacLaurin di $f(x) = \sqrt{1+x}$ $(\alpha = 1/2)$ e di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $(\alpha = -(1/2))$.

Fine dei richiami sulle serie di potenze e di Taylor

=========================

Equazioni che si risolvono per serie (metodo di Frobenius).

In certi casi è possibile determinare una soluzione che si scrive mediante una serie di potenze.

Per capire il metodo applichiamolo ad un esempio di cui già conosciamo la soluzione generale.

Esempio.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b\,. \end{cases}$$

Sappiamo già che la soluzione è $y(x) = a \cos x + b \operatorname{sen} x$.

D'altra parte, supponiamo di scriverla mediante una serie di potenze, cioè

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots$$

Derivando, si ha

$$y'(x) = a_1 + \cdots + n a_n x^{n-1} + (n+1) a_{n+1} x^n + (n+2) a_{n+2} x^{n+1} + \ldots$$

$$y''(x) = 2a_2 + \cdots + (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \ldots,$$

da cui,

$$y''(x) + y(x) = (2a_2 + a_0) + \cdots + ((n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n) x^n + \cdots = 0.$$

Ponendo i coefficienti uguali a zero si ottiene

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\, a_n$$

e, tenendo conto delle condizioni iniziali, si ha $a_0 = a$ e $a_1 = b$, da cui, per ricorrenza, si ha

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, a, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, b.$$

Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor di $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, si deduce

$$y(x) = a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = a \cos x + b \operatorname{sen} x.$$

A questo punto, affinchè l'uguaglianza precedente valga non solo formalmente, bisogna trovare il raggio di convergenza dello sviluppo ottenuto sopra. In questo caso, è immediato verificare che il raggio di convergenza delle due serie di potenze è $+\infty$ e quindi l'uguaglianza è vera per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la soluzione è analitica.

Consideriamo ora un'equazione a coefficienti continui e cerchiamo una sua soluzione analitica.

Esempio.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2xy' - 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Supponiamo che il problema abbia una soluzione esprimibile in serie di potenze, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione differenziale si ottengono le seguenti relazioni tra i coefficienti:

$$\begin{cases} 2a_2 - 4a_0 = 0 \\ 6a_3 - 6a_1 = 0 \\ (n+1)(n+2)a_{n+2} - 2na_n - 4a_n = 0\,. \end{cases}$$

Dalle condizioni iniziali si ha $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, da cui $a_2 = 0$ e $a_{n+2} = \frac{2(n+2)}{(n+1)(n+2)}\, a_n$. Procedendo per ricorrenza avremo

$$a_{2n} = 0 \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = \frac{1}{n!}\,,$$

e, quindi,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = xe^{x^2}$$

che è la soluzione (unica) del problema di Cauchy.

Un altro esempio in cui possiamo trovare una soluzione sviluppabile in serie di potenze è l'*equazione di Bessel.*

Esempio [Equazione di Bessel di ordine m]

Consideriamo l'equazione

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

detta *equazione di Bessel di ordine m.* Tale equazione interviene nello studio di problemi di diffusione in corpi con geometria cilindrica. Ad esempio, nella propagazione del calore in tubi, nella diffusione di vibrazioni in strutture cilindriche, nella vibrazione di segnali (modulazione).

Per semplicità, studieremo più nel dettaglio il caso dell'equazione *di ordine* 0 cioè supporremo $m = 0$. Per $x > 0$ possiamo dividere per x e l'equazione diventa

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

Proveremo a cercare una soluzione dell'equazione sviluppabile in serie di potenze in un intorno di $x_0 = 0$, cioè analitica in 0. Osserviamo che l'eventuale soluzione sarà necessariamente definita anche in 0 anche se l'equazione è singolare in 0. In altre parole, le soluzioni che troviamo come somma di una serie di potenze sono prolungabili con continuità anche in 0.

Sia allora $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e supponiamo $a_0 \neq 0$.

Derivando due volte e sostituendo si ha

$$a_1 + (3a_0 + 2a_2)x + (9a_3 + a_1)x^2 + \dots \big((n+2)^2 a_{n+2} + a_n\big)x^{n+1} + \dots =$$

$$= a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+2)^2 + a_n\Big)x^{n+1} = 0,$$

da cui

$$a_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2}\, a_n\,.$$

Perciò

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{e} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\, a_0$$

e quindi

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

che, come osservato sopra, è definita anche in $x = 0$, dove vale a_0. Osserviamo che nella soluzione ottenuta si ha $y'(0) = a_1 = 0$, per cui la derivata in 0 non può essere assegnata in modo arbitrario come si fa nel problema di Cauchy per le equazioni del second'ordine in forma normale. Il raggio di convergenza della serie ottenuta è $+\infty$: essa è quindi soluzione dell'equazione per ogni $x > 0$ e tende ad a_0 per $x \to 0$.

Ponendo $a_0 = 1$, si ottiene la funzione

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

detta *funzione di Bessel di prima specie di ordine* 0.

Si potrebbe dimostrare che l'equazione ammette anche una famiglia ad un parametro di soluzioni definite in $(0, +\infty)$ e non limitate per $x \to 0^+$. Tali soluzioni non possono però essere espresse come serie di potenze centrate in 0.

Torniamo a considerare ora l'equazione di ordine m. In questo caso cerchiamo una soluzione della forma $y(x) = x^m \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $a_0 \neq 0$. Svolgendo i calcoli troviamo

$$a_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_n = -\frac{1}{(m+n)^2 - m^2}\, a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

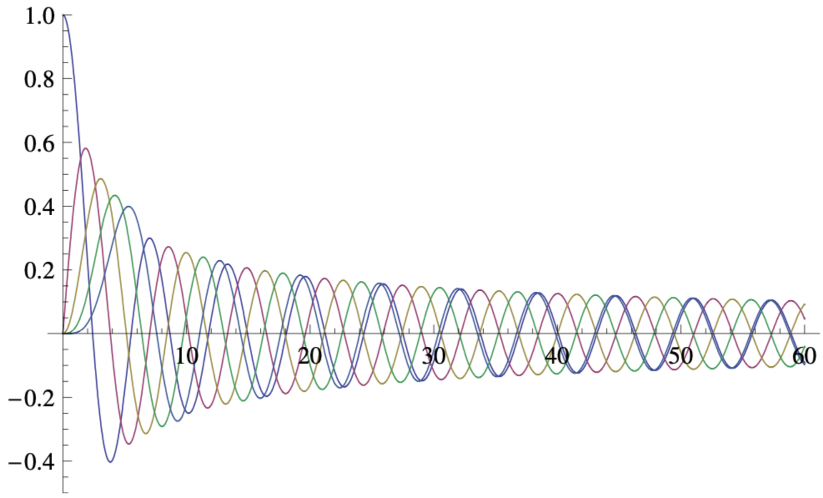
da cui tutti i coefficienti di indice dispari sono 0, mentre quelli di indice pari sono determinati dando un valore ad a_0. Ponendo

$$a_0 = \frac{1}{2^m\, m!},$$

si ottiene la serie

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n)!\, n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n},$$

che è detta *funzione di Bessel di prima specie di ordine* m. Notiamo che, per $m \neq 0$, $J_m(x)$ è infinitesima per $x \to 0$ e si comporta come x^m. La serie ha raggio di convergenza $+\infty$. Si può provare che J_m è pari se m è pari e dispari se m è dispari.



Funzioni di Bessel J_0, J_1, J_2, J_3, J_4

Le funzioni di Bessel sono anche dette anche *armoniche cilindriche*. Uno dei campi in cui vengono usate è la Teoria dei segnali, in particolare nella modulazione dei segnali per le trasmissioni.

Esempio [Equazione di Hermite]

Consideriamo l'equazione, detta *di Hermite*,

$$y'' - xy' + \lambda y = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

I coefficienti di questa equazione sono analitici in $\mathbb{R}$ e quindi ogni soluzione può essere espressa mediante una serie di potenze della forma $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza $R = +\infty$. Derivando due volte e sostituendo si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

Nella prima sommatoria i due termini per $n = 0$ e $n = 1$ sono nulli; quindi la sommatoria può partire da $n = 2$ e, ponendo $m = n - 2$, essa si può scrivere

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m.$$

Indicando ora nuovamente con n l'indice della sommatoria e raccogliendo, si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda - n)a_n\Big)x^n = 0$$

per ogni x appartenente all'intervallo di convergenza della serie. Dovendo l'uguaglianza valere per ogni x, dovranno essere uguali a 0 i coefficienti; si avrà cioè

$$a_{n+2} = \frac{n - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

I coefficienti a_n si possono calcolare per ricorrenza, una volta siano assegnati a_0 e a_1, i quali si possono determinare assegnando la posizione iniziale $y(0)$ e la velocità iniziale $y'(0)$. Osserviamo inoltre che se $y(x)$ è una soluzione, allora anche $y(-x)$ lo è e quindi anche la somma $y(x) + y(-x)$ e la differenza $y(x) - y(-x)$ lo sono, la prima essendo una funzione pari, la seconda dispari. Possiamo quindi limitarci a cercare separatamente le soluzioni pari e quelle dispari. Per $a_0 \neq 0$ e $a_1 = 0$ tutti i coefficienti dispari sono nulli e otteniamo le soluzioni pari, mentre per $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$ otteniamo le soluzioni dispari. Si ha

$$a_2 = \frac{-\lambda}{2!} a_0, \quad a_{2n} = \frac{-\lambda(2-\lambda)(4-\lambda)\dots(2n-2-\lambda)}{(2n)!} a_0,$$

$$a_3 = \frac{1-\lambda}{3!} a_1, \quad a_{2n+1} = \frac{1-\lambda(3-\lambda)\dots(2n-1-\lambda)}{(2n+1)!} a_1\,.$$

È facile verificare che le due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ hanno raggio di convergenza $R = +\infty$ e quindi rappresentano due soluzioni (linearmente indipendenti) dell'equazione. Osserviamo infine che se λ è un intero pari, ad esempio $\lambda = 2k$, i coefficienti a_{2n} sono tutti nulli da $n = k + 1$ in poi e quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ è un polinomio di grado $2k$. Analogamente, se $\lambda = 2k + 1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ è un polinomio di grado $2k + 1$. Tali polinomi sono detti *polinomi di Hermite*.

Concludiamo il paragrafo sul metodo di Frobenius osservando che lo studio del comportamento delle soluzioni nell'intorno di un punto singolare e, di conseguenza, la classificazione dei punti singolari è uno dei problemi principali tra quelli affrontati nello studio delle equazioni differenziali. Molte equazioni del second'ordine si incontrano nelle applicazioni e le loro soluzioni sono state tabulate con grande precisione. Citiamo ad esempio le equazioni seguenti ($p, a, b \in \mathbb{R}$):

- $xy'' + (1 - x)y' + py = 0$ (equazione di Laguerre)
- $(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0$ (equazione di Legendre (di ordine p))
- $y'' + (a + b\cos x)y' = 0$ (equazione di Mathieu)

Per ottenere informazioni sul comportamento delle loro soluzioni in un intorno dei punti singolari o all'infinito uno dei metodi usati è quello di rappresentarle mediante una serie di potenze.

4^a settimana - 17-18.10.19

Problemi ai limiti di Sturm-Liouville.

Accanto ai problemi di Cauchy, esiste una vasta parte della teoria delle equazioni differenziali dedicata allo studio dei cosiddetti *problemi ai limiti.* Cominciamo con un esempio semplice per dare un'idea del tipo di problema.

Esempio. Consideriamo l'equazione del second'ordine lineare a coefficienti costanti omogenea

$$y'' + y = 0\,.$$

Vogliamo vedere se esiste (almeno) una soluzione y dell'equazione che soddisfi le condizioni $y(0) = y(\pi) = 0$. Un problema di questo tipo è detto *problema dei due punti.* Come abbiamo già provato, l'integrale generale dell' equazione precedente è dato da

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\,,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ otteniamo $c_1 = 0$, mentre ponendo $y(\pi) = 0$ non si ha nessuna limitazione sulla costante c_2. Pertanto il problema ha **infinite** soluzioni della forma $y(x) = c \operatorname{sen} x\,,\ c \in \mathbb{R}$.

Se consideriamo invece la condizione $y(0) = 0,\ y(\pi) = \alpha\,, \alpha \neq 0\,$, si verifica subito che il problema non ha **nessuna** soluzione, mentre con $y(0) = 0,\ y(\pi/2) = \alpha$ si ottiene **una e una sola** soluzione, cioè la soluzione $y(x) = \alpha \operatorname{sen} x$.

Il problema dei due punti appena studiato è un caso particolare di un problema lineare ai limiti dipendente da un parametro reale. Ci interessa stabilire per quali valori del parametro (se ce ne sono), il problema ammette soluzioni non banali.

Esempio. [Condizioni al bordo di tipo Dirichlet]

Consideriamo il problema nell'intervallo $[0, \pi]$

$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = 0\,, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 = y(\pi)\,. \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il problema ha solo la soluzione nulla. Se $|\lambda| \neq 0$, la soluzione generale è $y(x) = c_1 \cos(\lambda\, x) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda\, x)$, $c_1, c_2 \in R$, da cui, imponendo le condizioni, si hanno soluzioni non banali se e solo se

$$\lambda_n^2 = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tali soluzioni sono dette gli *autovalori* del problema e le corrispondenti soluzioni non banali

$$y_n(x) = c \operatorname{sen}(nx), \quad n \in \mathbb{N},\ c \neq 0,$$

sono dette *autofunzioni* (o *autosoluzioni*).

Notiamo che se studiamo lo stesso problema in un generico intervallo $[0, a]$ otterremo

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{ e } y_n(x) = c \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n \in \mathbb{N},\, c \neq 0.$$

Un altro problema ai limiti per il quale ha interesse trovare autovalori e autofunzioni è il seguente:

Esempio. [Condizioni al bordo di tipo Neumann]

Consideriamo il problema nell'intervallo $[0, \pi]$

$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = 0\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ y'(0) = 0 = y'(\pi)\,. \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$, le costanti sono soluzioni, e quindi $\lambda = 0$ è un autovalore. Se $|\lambda| \neq 0$, la soluzione generale è $y(x) = c_1 \cos(\lambda\, x) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda\, x)$, $c_1, c_2 \in R$, da cui, imponendo le condizioni, si hanno soluzioni non banali se e solo se

$$\lambda_n^2 = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

e le corrispondenti autofunzioni sono

$$y_n(x) = c \cos(nx), \quad n \in \mathbb{N},\, c \neq 0.$$

I problemi che abbiamo esaminato nei due esempi precedenti sono casi particolari dei più generali *problemi di Sturm - Liouville.* Come vedremo in seguito essi hanno forti relazioni con alcune equazioni differenziali alle derivate parziali provenienti da problemi della Fisica. Nel caso generale l'equazione si scrive nella forma

$$(1) \qquad \big(r(x)y'\big)' + (q(x) + \lambda s(x))y = t(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in [a, b],$$

dove i coefficienti r, q, s e il termine noto t sono funzioni continue in $[a, b]$. Se, inoltre, r è di classe C^1 in $[a, b]$, derivando ci si riconduce ad un'equazione della forma

$$(2) \qquad p_0(x)y'' + p_1(x)y' + (p_2(x) + \lambda p_3(x))y = b(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in [a, b].$$

Viceversa, un'equazione del tipo (2), con l'ulteriore ipotesi $p_0(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, può essere ricondotta a una del tipo (1) moltiplicandola per $\frac{1}{p_0(x)}\, e^{\int_0^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt}$.

Si ha infatti

$$e^{\int_0^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt}\, y'' + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\, e^{\int_0^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt}\, y' + \frac{e^{\int_0^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt}}{p_0(x)}\,(p_2(x)+\lambda p_3(x))y = \frac{e^{\int_0^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt}}{p_0(x)}\, b(x)\,,$$

che è del tipo (1) ponendo $r(x) = e^{\int_0^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt}$ e ricordando che, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha $r'(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\, e^{\int_0^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt}$.

Tenuto conto di questa osservazione, da ora in poi in questo paragrafo, considereremo un'equazione del second'ordine della forma (2), cioè del tipo

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + (p_2(x) + \lambda p_3(x))y = b(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in [a,b],$$

dove i coefficienti e il termine noto sono assunti continui nell'intervallo $[a,b]$ e si suppone $p_0(x) \neq 0$ e $p_3(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, cerchiamo soluzioni non banali di classe C^2 dell'equazione, soggette alle condizioni ai limiti

$$\begin{cases} a_1y(a) + a_2y'(a) + a_3y(b) + a_4y'(b) = k_1\,, \\ b_1y(a) + b_2y'(a) + b_3y(b) + b_4y'(b) = k_2\,, \end{cases}$$

con $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2$ costanti assegnate. Nelle ipotesi in cui ci siamo messi, l'equazione (2) con le condizioni ai limiti considerate è detto un *problema di Sturm-Liouville regolare* ed è ovviamente un problema lineare.

Cominciamo perciò col considerare il problema omogeneo, cioè l'equazione

$$(3) \qquad p_0(x)y'' + p_1(x)y' + (p_2(x) + \lambda p_3(x))y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in [a,b]$$

con le condizioni

$$\begin{cases} a_1y(a) + a_2y'(a) + a_3y(b) + a_4y'(b) = 0\,, \\ b_1y(a) + b_2y'(a) + b_3y(b) + b_4y'(b) = 0\,. \end{cases}$$

Sia $y(x,\lambda) = c_1y_1(x,\lambda) + c_2y_2(x,\lambda)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la soluzione generale dell'equazione (3). Imponendo le condizioni, otteniamo un sistema lineare algebrico 2×2 nelle incognite c_1 e c_2. Denotiamo con $A(\lambda)$ il determinante della matrice dei coefficienti. Si possono avere due casi:

i) se λ è tale che $A(\lambda) \neq 0$, il sistema algebrico ha solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$ e quindi il problema ha solo la soluzione nulla;

ii) se $\bar{\lambda}$ è tale che $A(\bar{\lambda}) = 0$ (in tal caso $\bar{\lambda}$ è detto un *autovalore* del problema), il sistema algebrico ha infinite soluzioni. Sia $(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$ una di queste soluzioni non nulle; allora la funzione $y(x, \bar{\lambda}) = \bar{c}_1 y_1(x, \bar{\lambda}) + \bar{c}_2 y_2(x, \bar{\lambda})$ è una soluzione non nulla (detta *autosoluzione*) del problema. In questo caso, ci saranno infinite autosoluzioni delle quali al più due sono linearmente indipendenti a seconda che il rango della matrice dei coefficienti del sistema algebrico sia 1 oppure 0.

Torniamo ora a considerare il problema non omogeneo. In questo caso la soluzione generale sarà data da $y(x, \lambda) = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda) + \bar{y}(x, \lambda)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dove $\bar{y}$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Imponendo le condizioni otteniamo questa volta un sistema algebrico non omogeneo. In corrispondenza del caso *i)* (cioè $A(\lambda) \neq 0$), il sistema algebrico avrà una e una sola soluzione (c_1, c_2) e quindi l'equazione (3), con le condizioni considerate, avrà una e una sola soluzione ogni volta che vengano assegnati $b(x), k_1, k_2$. Se invece, come nel caso *ii)*, esiste $\bar{\lambda}$ tale che $A(\bar{\lambda}) = 0$, il sistema algebrico non omogeneo avrà infinite soluzioni, se i termini noti sono scelti con opportune condizioni di compatibilità (ricordare il Teorema di Rouché-Capelli), oppure nessuna soluzione. L'equazione (3), con le condizioni considerate, non avrà perciò in generale soluzione, a meno che $b(x), k_1, k_2$ non soddisfino opportune condizioni.

La conclusione nel caso non omogeneo si può dunque riassumere nella seguente *alternativa*, detta *di Fredholm*: senza condizioni sui termini noti, il problema ha una e una sola soluzione oppure nessuna soluzione.

Illustriamo la discussione fatta sopra con l'esempio dell'oscillatore armonico.

Esempio. [Condizioni ai limiti periodiche]

Consideriamo nell'intervallo $[0, \pi]$ il problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = b(x)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y(\pi), \\ y'(0) = y'(\pi)\,, \end{cases}$$

dove, per il momento, supponiamo il termine noto b solo continuo.

Se $\lambda = 0$ si ha $y(x) = c_1 + c_2 x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, da cui, imponendo le condizioni, si ottiene $c_2 = 0$ e c_1 qualsiasi. Perciò $\lambda_0 = 0$ è un autovalore a cui corrisponde l'autofunzione $y_0(x) \equiv 1$ e tutte quelle che si ottengono moltiplicandola per $c_1 \neq 0$. Se $\lambda \neq 0$ la soluzione generale è $y(x, \lambda) = c_1 \cos(\lambda\, x) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda\, x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, da cui, imponendo le condizioni di periodicità, si ottiene il sistema algebrico

$$\begin{cases} (1 - \cos \lambda\pi) c_1 - (\operatorname{sen} \lambda\pi)\, c_2 = 0\,, \\ (\lambda \operatorname{sen} \lambda\pi) c_1 + \lambda(1 - \cos \lambda\pi) c_2 = 0\,. \end{cases}$$

Si ha perciò $A(\lambda) = 2\lambda(1 - \cos\lambda\pi) = 0$ se e solo se $\cos\lambda\pi = 1$. Di conseguenza, gli autovalori sono $\lambda^2 = 4n^2$, $n \in \mathbb{N}$. In questo caso la matrice delle condizioni iniziali ha rango 0 e quindi il sistema algebrico ha infinite soluzioni con c_1 e c_2 arbitrari. Perciò ad ogni autovalore diverso da 0 corrispondono due autofunzioni linearmente indipendenti

$$y_{1n}(x) = \cos 2nx, \quad y_{2n}(x) = \operatorname{sen} 2nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che queste autofunzioni, compresa anche la costante $y_0(x) \equiv 1$, sono periodiche di periodo π.

Passiamo ora al problema non omogeneo. Se $\lambda^2 \neq 4n^2$, $n \in \mathbb{N}$, il problema ha una e una sola soluzione per ogni termine noto $b(x)$, soluzione che si può determinare con gli usuali metodi visti in precedenza (ad esempio, se $b(x) = e^x$, l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 \cos(\lambda\, x) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda\, x) + \frac{e^x}{1+\lambda^2},\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R},$$

dove c_1 e c_2 si ottengono in modo unico imponendo le condizioni di periodicità $y(0) = y(\pi)$ e $y'(0) = y'(\pi)$.) Se, invece, $\lambda^2 = 4n^2$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, il problema non avrà in generale soluzione, a meno che non si impongano delle condizioni di compatibilità su $b(x)$. Ad esempio, se fissiamo $\bar{n}$ e prendiamo come termine noto una funzione π-periodica come $b(x) = e^{2kix}$ con $k \in \mathbb{Z}$, $k^2 \neq \bar{n}^2$, i l'unità immaginaria, allora il problema ha soluzione, anzi ammette infinite soluzioni della forma

$$y_{\bar{n}}(x) = c_1 \cos(2\bar{n}x) + c_2 \operatorname{sen}(2\bar{n}x) + \frac{e^{2k\pi x}}{4(\bar{n}^2 - k^2)},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si potrebbe dimostrare che la periodicità del termine noto è proprio la condizione che rende compatibile la risolubilità del problema.

Concludiamo il paragrafo con un problema ai limiti nel quale gli autovalori non si possono calcolare in maniera esatta.

Esempio. Determiniamo gli autovalori del problema ai limiti lineare, nell'intervallo $[0, 1]$,

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ y(0) + y'(0) = 0, \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

È immediato verificare che, per $\lambda < 0$, esso ammette solo la soluzione banale $y \equiv 0$. Se $\lambda = 0$ si ha $y(x) = c_1 + c_2 x$, $c_1, c_2 \in R$, da cui, imponendo le condizioni, si ottiene $y(x) = c(1 - x), c \in \mathbb{R}$.. Perciò $\lambda = 0$ è un autovalore. Se $\lambda > 0$ si ha $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, x)$, $c_1, c_2 \in R$, da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_1 + \sqrt{\lambda}\; c_2 = 0, \\ \cos\sqrt{\lambda}\, c_1 + \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\, c_2 = 0\,. \end{cases}$$

Per avere c_1 e c_2 non entrambe nulle λ dovr soddisfare l'equazione tang $\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}$, che possiamo risolvere solo con metodi numerici. Si ottengono gli autovalori

$$\lambda_1 \approx (4,5)^2, \quad \lambda_2 \approx (7,7)^2, \dots, \lambda_n \approx \Big((2n+1)\frac{\pi}{2}\Big)^2, n \in \mathbb{N}.$$

Le autofunzioni corrispondenti sono della forma

$$y_n(x) = -\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda_n}\, x) + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\, x).$$

Norme e prodotti scalari

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o (su $\mathbb{C}$). Una *norma* su V è una applicazione $N\colon V \to \mathbb{R}$ tale che

1. $N(x) \geq 0$ per ogni $x \in V$ e $N(x) = 0 \iff x = 0$;
2. $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$ per ogni $x \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}($ o $\alpha \in \mathbb{C})$;
3. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ per ogni $x, y \in V$.

In genere per indicare una norma N si usa la notazione $\|\cdot\|$.

Esempi. In $\mathbb{R}$ una norma è data da $N(x) = |x|$.

In $\mathbb{R}^n$ esempi di norme sono:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \quad \text{norma euclidea}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_k|, k = 1, 2, \dots, n\}$$

Definizione. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio normato V è *convergente* a un elemento $x \in V$ se $\|x_n - x\| \to 0$ per $n \to +\infty$.

Definizione. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è detta *di Cauchy* se :

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N_\varepsilon$, si ha $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Teorema. *In uno spazio normato ogni successione convergente è di Cauchy.*

Il viceversa in generale è falso. Ad esempio nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali esistono successioni di Cauchy non convergenti. Un famoso teorema, detto Teorema di Cauchy, afferma che in $\mathbb{R}$ ogni successione di Cauchy è convergente. Come facile conseguenza ne consegue che anche in $\mathbb{C}$ e in $\mathbb{R}^n$ vale lo stesso risultato.

Definizione. Uno spazio normato si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente.

Definizione. Uno spazio normato completo è chiamato *spazio di Banach.*

Lo spazio $C([a, b])$. Nello spazio delle funzioni $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue si può definire una norma ponendo

$$\|f\| = \max_{t\in[a,b]} f(t).$$

Tale norma è detta *lagrangiana* e, con essa, $C([a, b])$ è uno spazio di Banach.

Lo spazio $L^2(a, b)$. Una funzione f da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$) si dice di classe $\mathcal{L}^2$, o che appartiene allo spazio vettoriale $\mathcal{L}^2((a, b))$, se è misurabile secondo Lebesgue e l'integrale

$$I(f) = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

è finito. La funzione $I : \mathcal{L}^2((a, b)) \to \mathbb{R}$ verifica tre delle quattro proprietà della norma, ma può capitare che $I(f)$ sia zero senza che sia identicamente nulla f (la funzione I non è quindi una norma ma, come si usa dire, una *seminorma*). Si potrebbe provare però che $I(f)$ è zero se e solo se f è nulla quasi ovunque (ossia, tranne un insieme di misura nulla). Questo suggerisce di introdurre in $\mathcal{L}^2((a, b))$ una relazione di equivalenza: due funzioni di $\mathcal{L}^2((a, b))$ si dicono equivalenti se differiscono per una funzione nulla quasi ovunque. In un certo senso, da un punto di vista fisico, questo significa che la loro differenza è una funzione che non conta niente, perché priva di energia. È facile introdurre una nozione di somma tra classi di equivalenza di funzioni in $\mathcal{L}^2((a, b))$ e di moltiplicazione di una classe di equivalenza per uno scalare (reale o complesso). Si ottiene così uno spazio vettoriale che può essere facilmente reso normato definendo la norma di una classe di equivalenza di funzioni come la seminorma I calcolata in una qualunque delle funzioni della classe. Lo spazio normato che si ottiene si denota con il simbolo $L^2((a,b))$, è uno spazio di Banach, ed è di primaria importanza per le applicazioni alla Fisica e all'Ingegneria.

Da ora in avanti, per abuso di linguaggio, data una funzione di $\mathcal{L}^2((a,b))$, invece di dire che questa individua (o definisce) una classe di equivalenza di $L^2((a,b))$, diremo più semplicemente che sta in $L^2((a,b))$.

Esercizio. Stabilire quali delle seguenti funzioni stanno in $L^2((0,1))$: $f(t) = 1/t,\ 1/\sqrt{t},\ t^2,\ 1/\sqrt[3]{t}$.

Esempio. Proviamo che lo spazio $C([a,b])$ delle funzioni continue nell'intervallo $[a,b]$ con la norma L^2 non è completo.

Infatti sia $\{f_n\}$ la successione di funzioni continue nell'intervallo $[0,1]$ definita da $f_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$. La successione $\{f_n\}$ è di Cauchy in $L^2((0,1))$, poiché

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_0^1 (t^n - t^m)^2 dt$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{n+m+1} + \frac{1}{2m+1} < \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1} < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

se N_ε è sufficientemente grande. D'altra parte $\{f_n\}$ tende puntualmente ad una funzione f non continua in $[0,1]$, essendo

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} t^n = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0,1) \\ 1 & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

(f non è continua in $t = 1$).

Osservazione. Osserviamo che come i razionali, pur non costituendo uno spazio completo, sono contenuti in uno spazio completo (cioè $\mathbb{R}$), anche $C([a,b])$, con la norma L^2, è un sottospazio di uno spazio completo: lo spazio $L^2((a,b))$.

Definizione. Un *prodotto scalare* in uno spazio vettoriale complesso (risp. reale) V è una funzione che ad ogni $(x,y) \in V \times V$ associa un numero complesso (risp. reale) $\langle x,y\rangle$ che gode delle seguenti quattro proprietà:
1) per ogni $x_1, x_2, y \in V$ si ha $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$,
2) per ogni $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
3) per ogni $x \in V$ si ha $\langle x, x\rangle \geq 0$ e $\langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$;
4) per ogni $x, y \in V$ si ha $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

Il prodotto scalare in uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ è anche chiamato *prodotto hermitiano.*

Le proprietà 1) e 2) implicano che l'applicazione $x \mapsto \langle x, y\rangle$ è lineare. Ovviamente, quando lo spazio V è reale, la proprietà 4) può essere scritta senza la barra di coniugio; in questo caso il prodotto scalare è simmetrico e pertanto anche bilineare.

Se lo spazio dotato di prodotto scalare è completo, esso è detto *spazio di Hilbert*.

Dato un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in uno spazio V, è possibile definire una norma nel seguente modo: $||x|| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, detta norma associata al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. In questo caso si dice anche che la norma e il prodotto scalare sono tra loro compatibili (o correlati).

Nello spazio $L^2((a,b))$, reale o complesso, si definisce un prodotto scalare compatibile con la norma nel seguente modo:

$$\langle f, g \rangle = \int_J f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Esempio [Lo spazio l^2 (si legge l-piccolo 2)]

È lo spazio delle successioni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reali o complesse tali che $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$. Si può definire un prodotto scalare ponendo

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Con tale prodotto scalare l^2 è completo, cioè è uno spazio di Hilbert.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. *Sia V uno spazio con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dato un qualunque $x \in V$, denotiamo con $||x||$ il numero $\langle x, x \rangle^{1/2}$. Allora, per ogni x, $y \in V$, si ha $|\langle x, y \rangle| \leq ||x||\,||y||$.*

Un caso particolare della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è la seguente disuguaglianza di Cauchy (in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$):

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Definizione. Due vettori x e y in uno spazio con prodotto scalare si dicono ortogonali (tra loro) se $\langle x, y \rangle = 0$, e in questo caso si scrive $x \perp y$.

Definizione. Un sottoinsieme S di uno spazio di Hilbert si dice un *sistema ortogonale* se per ogni x, $y \in S$ si ha $x \perp y$. Si dice che S è un sistema *ortonormale* se oltre ad essere ortogonale tutti i suoi elementi hanno norma uno.

Esempi di sistemi ortonormali:
- Nello spazio $L^2((-\pi,\pi))$ reale, l'insieme costituito dalle funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \dots$$

Si ha infatti

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\ \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \neq 0 \end{cases}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx\ \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \neq 0 \end{cases}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\ \operatorname{sen} nx\, dx = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

- Nello spazio $L^2((-\pi,\pi))$ complesso, l'insieme $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

- In l^2, la collezione di vettori $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$, dove $e_1 = (1,0,0,\dots)$, $e_2 = (0,1,0,\dots)$, ecc.
Si ha infatti

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i\,j},$$

dove $\delta_{i\,j}$ denota il simbolo di Kronecker, cioè

$$\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Esempio. [Significato del prodotto scalare in L^2]

Il prodotto scalare di due funzioni di $L^2(0,T)$ ha un interessante significato fisico: supponiamo che la prima funzione $V(t)$ rappresenti la differenza di potenziale T-periodica applicata ai capi di un conduttore (con una determinata impedenza). Per effetto di tale tensione, nel conduttore circolerà una corrente $I(t)$ che possiamo ritenere periodica dello stesso periodo T (trascurando un fenomeno transitorio che decade esponenzialmente). Istante per istante la potenza dissipata è data dal prodotto $V(t)I(t)$. Pertanto il prodotto scalare in $L^2(0,T)$,

$$\langle V, I\rangle = \int_0^T V(t)I(t)\, dt,$$

non è altro che il calore dissipato in un intervallo di tempo pari al periodo. È interessante osservare che in alcuni casi la corrente può essere ortogonale alla tensione. Questo si verifica, per esempio, quando l'impedenza è puramente capacitiva (o induttiva). Vediamo il caso di impedenza capacitiva. Sappiamo che la carica elettrica Q di un condensatore (ideale) è proporzionale alla differenza di potenziale V applicata ai suoi elettrodi, e la costante di proporzionalità C si chiama capacità del condensatore. Si ha quindi $Q = CV$. Se la differenza di potenziale $V(t)$ è una funzione T-periodica (supponiamola per semplicità di classe C^1), derivando la precedente equazione si ottiene $I(t) = CV'(t)$. Mostriamo che in questo caso V ed I sono ortogonali tra loro. Si ha infatti

$$\langle V, I \rangle = C \int_0^T V(t)V'(t)\,dt = \frac{C}{2}\left[V^2(t)\right]_0^T = \frac{C}{2}\left(V^2(T) - V^2(0)\right) = 0.$$

5^a settimana - 24.10.19

Serie di Fourier

Ricordiamo che una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *periodica di periodo* T ($T > 0$) se $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ad esempio, le funzioni $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ sono periodiche di periodo 2π e così pure lo sono $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$, $n \in \mathbb{N}$, e le loro combinazioni lineari

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \quad N \in \mathbb{N},$$

dette *polinomi trigonometrici*, dove i coefficienti a_0, a_n, b_n sono numeri reali.

Supponiamo che la successione delle somme parziali $s_N(x)$ converga per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè che la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

converga puntualmente in $\mathbb{R}$. La sua somma sarà ovviamente una funzione 2π-periodica. Viceversa, data una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, ci si può chiedere se si possano determinare i coefficienti a_0, a_n, b_n in modo tale che si abbia

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Supposto che valga l'uguaglianza precedente e che la serie sia integrabile termine a termine (per il teorema di integrazione per serie una condizione sufficiente affinché ciò si verifichi è che $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ siano convergenti, cosicché la serie converga totalmente, e quindi uniformemente, in un intervallo di ampiezza 2π), con un procedimento dovuto a Fourier si possono determinare a_0, a_n, b_n. Tali coefficienti sono detti, appunto, *coefficienti di Fourier* associati ad f. Per calcolarli, fissato $m \in \mathbb{N}$ e tenuto conto delle osservazioni sui sistemi ortonormali fatte in precedenza, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx \Big) = \pi a_m$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \, dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{sen}\,mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\,nx\,\mathrm{sen}\,mx\,dx\Big)=\pi b_m,$$

da cui, ponendo $n=m$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n=0,1,2,\dots,$$

(anche per $n=0$ essendovi $1/2$ che moltiplica a_0) e

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx,\quad n=1,2,\dots.$$

Notiamo che i coefficienti di Fourier sono legati a f da relazioni integrali, mentre, nel caso delle serie di Taylor, i coefficienti sono legati a f da relazioni differenziali. Naturalmente, è sufficiente che f sia una qualunque funzione 2π-periodica e integrabile nell'intervallo $(-\pi,\pi)$ affinché gli integrali sopra siano ben definiti e, di conseguenza, si possa ancora scrivere la serie, con tali coefficienti a_n e b_n. Non è detto però che tale serie, chiamata *serie di Fourier di* f, sia una serie convergente o, anche se convergente, che abbia come somma $f(x)$.

Affronteremo sotto il problema di stabilire quali ipotesi su (una funzione integrabile) f garantiscano che la sua serie di Fourier abbia per somma la f stessa.

Osservazione. Abbiamo visto in precedenza che l'insieme delle funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad n\in\mathbb{N},$$

costituisce un sistema ortonormale nello spazio $L^2((-\pi,\pi))$ reale, con il prodotto scalare definito sopra. Poniamo, per $n\in\mathbb{N}$,

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \varphi_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\quad \varphi_{2n-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sen}\,nx$$

e

$$c_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a_0,\quad c_{2n}=\sqrt{\pi}\,a_n,\quad c_{2n-1}=\sqrt{\pi}\,b_n.$$

Osserviamo anche che i coefficienti c_n sono dati dai prodotti scalari in $L^2((-\pi,\pi))$ tra le funzioni φ_n ed f, cioè

$$c_n=<f,\varphi_n>=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi_n(x)\,dx.$$

Possiamo perciò riscrivere la serie di Fourier di f nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} < f, \varphi_n > \varphi_n(x).$$

In pratica, per il sistema ortonormale $\{\varphi_n,\, n = 0, 1, 2, \dots\}$, i c_n rappresentano quello che per la base canonica $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ di $\mathbb{R}^k$ sono le coordinate cartesiane ortogonali (ricordiamo che dato $v \in \mathbb{R}^k$, si ha $v = \sum_{n=1}^{k} v_n e_n$ dove $v_n =< v, e_n >$).

Nello spazio $L^2((-\pi, \pi))$ complesso si ottiene un'analoga scrittura della serie di Fourier considerando il sistema ortonormale costituito dalle funzioni $\varphi_n = \sqrt{\pi} e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Osservazione. [Funzioni pari o dispari]

i) Se f è pari (cioè $f(x) = f(-x)$) tutti i b_n sono nulli e quindi la serie di Fourier diventa
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx;$$

i) Se f è dispari (cioè $-f(x) = f(-x)$) tutti i a_n sono nulli e quindi la serie di Fourier diventa
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} nx.$$

Osservazione. [Periodo diverso da 2π]

Se f è periodica di periodo $T > 0$ (non necessariamente 2π) possiamo considerare la serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 x + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 x), \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T},$$

con

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos n\omega_0 x \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \operatorname{sen} n\omega_0 x \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Il numero ω_0 è detto la *frequenza fondamentale* di f. La serie di Fourier, nel caso in cui abbia come somma f, può essere interpretata come la scomposizione del segnale T-periodico f nelle frequenze $n\omega_0$ multiple della frequenza fondamentale ω_0 e i coefficienti a_n, b_n misurano i contributi dati al segnale dalla n-esima frequenza.

Esempio. Consideriamo la funzione *mantissa*, cioè $f(x) = x - [x]$, dove $[x]$ denota la parte intera di x ossia il più grande intero minore o uguale a x. Essa è periodica di periodo 1 e i suoi coefficienti di Fourier sono

$$a_0 = 2\int_0^1 x\,dx = 1;$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos 2\pi nx\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n = 2\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\,2\pi nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

mentre la sua serie di Fourier è

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{sen}\,2\pi nx.$$

Osserviamo che per $x = 0$ sia ha che la serie converge a $\frac{1}{2} = \frac{f(0+)+f(0-)}{2}$, mentre $f(0) = 0$ (abbiamo indicato con $f(0+)$ il limite destro $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e con $f(0-)$ il limite sinistro $\lim_{x\to 0^-} f(x)$).

Esempio.

Sia $f(x)$ il prolungamento periodico della restrizione di $x \mapsto x^2$ all'intervallo $[-\pi, \pi]$. I coefficienti di Fourier sono (f è una funzione pari)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = (-1)^n\frac{4}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

La serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

che, essendo $|a_n| \le \frac{4}{n^2}$ con $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ convergente, risulta totalmente convergente su tutto $\mathbb{R}$. Come vedremo nei teoremi che seguono la somma della serie sarà la funzione f stessa.

Esercizio. Scrivere coefficienti e serie di Fourier dei prolungamenti 2π-periodici delle restrizioni a $[-\pi, \pi]$ delle funzioni $x \mapsto |x|$ e $x \mapsto x$.

Esempio. Una interpretazione musicale della serie di Fourier (fotocopia distribuita a lezione).

Convergenza di una serie di Fourier

Occupiamoci ora del problema della convergenza di una serie di Fourier.

Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica, limitata e integrabile in $(-\pi, \pi)$. Ricordiamo che, fissato $N \in \mathbb{N}$, abbiamo indicato con

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\Big(\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\Big)\cos nx + \Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx\Big)\,\mathrm{sen}\,nx\Big)$$

la somma parziale n-esima della serie di Fourier associata ad f. Sia poi

$$\sigma_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n\,\mathrm{sen}\,nx), \qquad N \in \mathbb{N},$$

un polinomio trigonometrico di grado N con coefficienti a_n e b_n qualsiasi. I risultati che seguono mostrano una importante proprietà dei coefficienti di Fourier di f (per semplicità li enunceremo per funzioni 2π-periodiche)

Teorema.

Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica, limitata e integrabile in $(-\pi, \pi)$. Si ha

i) Lo scarto quadratico medio

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_N(x)|^2\,dx$$

è minimo per $\sigma_N = s_N$;

ii)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_N(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\Big);$$

iii)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geq \pi\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\Big)$$

(disuguaglianza di Bessel)

Una immediata conseguenza della disuguaglianza di Bessel è il seguente

Corollario. *Nelle ipotesi del teorema precedente, i coefficienti di Fourier di f sono infinitesimi per $n \to \infty$, cioè*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = 0$$

Osservazione. Con i coefficienti c_n introdotti sopra la disuguaglianza di Bessel si può scrivere

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx \geq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2.$$

Osservazione. [convergenza in $L^2((-\pi,\pi))$ (detta anche in media quadratica)]

Si potrebbe dimostrare che le ipotesi del teorema precedente garantiscono che la disuguaglianza di Bessel è in realtà una *uguaglianza*. Ne segue, di conseguenza, che

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_N(x)|^2 \, dx = 0,$$

cioè che la successione $\{s_N\}$ delle somme parziali converge a f nella norma di $L^2((-\pi,\pi))$.

I risultati che seguono riguardano la convergenza puntuale e uniforme di una serie di Fourier.

Definizione. Una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice *regolare a tratti in* $[a,b]$ se esistono un numero finito di punti x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, tali che f è di classe C^1 in ogni intervallo (x_{i-1}, x_i) e la restrizione di f' a (x_{i-1}, x_i) è prolungabile con continuità a $[x_{i-1}, x_i]$ (cioè esiste finito il limite di $f'_{|(x_{i-1},x_i)}(x)$ per $x \to x_{i-1}^+$ e per $x \to x_i^-$). Diremo poi che $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è regolare a tratti in $\mathbb{R}$ se è regolare a tratti in ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

La condizione espressa nella definizione precedente è dovuta, nella sua formulazione originaria, a Dirichlet. [1]

Prima di enunciare il prossimo risultato introduciamo la seguente

[1] Gustav Dirichlet, matematico tedesco di origine francese (1805-1859)

Notazione. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e supponiamo che in $x \in \mathbb{R}$ esistano finiti i due limiti destro e sinistro $\lim_{h\to 0^+} f(x+h)$ e $\lim_{h\to 0^-} f(x+h)$. Indicheremo tali limiti con $f(x+)$ e $f(x-)$ rispettivamente.

Teorema. [Convergenza puntuale di una serie di Fourier] *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo $T > 0$ e regolare a tratti. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di f converge a $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. In particolare, nei punti x in cui f è continua la serie converge a $f(x)$.*

Esempio.

Sia f la funzione 2π-periodica ottenuta prolungando su $\mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad -\pi < x \le 0, \\ 1\,, & \text{se} \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

I coefficienti di Fourier sono

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

e, quindi, la serie di Fourier è

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}.$$

Per il teorema della convergenza puntuale delle serie di Fourier, la serie converge a $f(x)$ in ogni $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Invece, per $x = 0$ la serie ha come somma $1/2$ che è la media dei limiti destro e sinistro di f in 0. Ponendo $x = \pi/2$ si ha convergenza puntuale a 1 e otteniamo

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

da cui

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

che coincide con la serie di Taylor di $\operatorname{arctang} x$ in $x = 1$.

Osservazione. Si potrebbe far vedere che la sola ipotesi che f sia continua non è sufficiente a provare la convergenza puntuale della serie di Fourier, ma gli esempi sono complicati.

Una condizione abbastanza profonda per la convergenza puntuale di una serie di Fourier, dovuta allo stesso Dirichlet, è la seguente

Teorema. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione periodica di periodo* $T > 0$. *Supponiamo che l'intervallo* $[-T/2, T/2]$ *possa essere suddiviso in un numero finito di sottointervalli in ciascuno dei quali* f *sia monotona. Allora, vale la tesi del teorema precedente.*

Esempio.

Sia $f(x)$ il prolungamento periodico della restrizione di $x \mapsto \sqrt{|x|}$ all'intervallo $[-1, 1]$. La funzione f non è regolare a tratti in quanto nei punti $x_n = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, i limiti destro e sinistro di $f'(x)$ valgono ∞. D'altra parte, f soddisfa le ipotesi di monotonia del teorema precedente ed è inoltre continua in $\mathbb{R}$. Perciò, la sua serie di Fourier converge puntualmente a $f(x)$ stessa. I coefficienti di Fourier sono (f è una funzione pari)

$$a_0 = \int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\, dx = \frac{4}{3};$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \sqrt{|x|} \cos n\pi x \, dx, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

6^a settimana - 31.10.19

Teorema. [Convergenza uniforme di una serie di Fourier] *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo $T > 0$ e regolare a tratti. Allora, se f è continua in tutto $\mathbb{R}$ la sua serie di Fourier converge totalmente (e, quindi, uniformemente) a f in $\mathbb{R}$. Più in generale, la serie di Fourier di f converge totalmente a f in ogni intervallo $[a, b]$ in cui f è continua.*

Esempio.

Sia $f(x)$ il prolungamento 2π-periodico della restrizione a $[-\pi, \pi]$ delle funzione $x \mapsto |x|$. La funzione f è regolare a tratti e continua in $\mathbb{R}$. Perciò la sua serie di Fourier converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$. Altrimenti, se invece, ad esempio, $f(x)$ è il prolungamento 2π-periodico della restrizione a $[-\pi, \pi]$ delle funzione $x \mapsto x$ si ha convergenza uniforme in ogni intervallo $[a, b] \subset \big((2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi\big)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Il teorema che segue riguarda l'integrabilità termine a termine di una serie di Fourier. Osserviamo che la formula vale senza che siano fatte ipotesi sulla convergenza uniforme della serie di Fourier (come nel caso delle serie di Taylor) e neppure sulla sua convergenza puntuale.

Teorema. [Integrabilità termine a termine di una serie di Fourier] *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo $T > 0$ e regolare a tratti. Allora, fissati x_0 e x in $[-T/2, T/2]$ si ha*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \frac{a_0}{2}(x - x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)\, dt.$$

Rappresentazione complessa di una serie di Fourier.

Talvolta risulta utile rappresentare la serie di Fourier di una funzione 2π-periodica in forma complessa, utilizzando le formule di Eulero introdotte in precedenza. Si ha infatti

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx &= a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}, \end{aligned}$$

dove si è posto

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \operatorname{sen} nx)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

e

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i \operatorname{sen} nx)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(-n)x}\, dx.$$

Si ottiene perciò la rappresentazione

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \qquad \text{dove} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

(notiamo che per $n = 0$ si ha $c_0 = 2a_0$).

La serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ è una serie cosiddetta *bilatera*, cioè va pensata come limite delle somme parziali

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Se f è periodica di periodo $T > 0$ si ha, in maniera analoga,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 x}, \qquad \text{dove } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{e} \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega_0 x}\,dx.$$

Osservazione.

Le formule precedenti permettono di estendere in modo naturale il concetto di serie di Fourier a funzioni: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a valori complessi tali che $\mathrm{Re}f$ e $\mathrm{Im}f$ sono periodiche e continue a tratti.

Osservazione. [Fenomeno di Gibbs]

Le somme parziali $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega_0 x}$ non sono molto adatte per approssimare eventuali salti di f. Si può verificare che, in un intorno di un punto di salto, l'errore commesso mostra due picchi di segno opposto a quello della discontinuità che, per N grande, risultano intorno al 9% del salto. Inoltre, all'aumentare di N le ascisse dei picchi si spostano verso il punto di salto, ma la loro ampiezza non diminuisce, creando il cosiddetto *fenomeno di Gibbs*. Esso è causato da un contributo troppo grande dei coefficienti c_n corrispondenti alle frequenze $n\omega_0$ più alte.

In realtà, il primo a notare questo fenomeno fu Henry Wilbraham, matematico inglese, che pubblicò un articolo riguardante questo argomento nel 1848. I suoi risultati furono però conosciuti solo molto più tardi (nel 1925) ad opera del matematico scozzese Carslaw. Nel 1898 invece il fisico statunitense Albert A. Michelson inviò una lettera al fisico matematico Josia Willard Gibbs; Michelson aveva notato questo fenomeno grazie al suo analizzatore armonico, uno strumento capace di determinare le prime ottanta coordinate di Fourier di una funzione data graficamente. In seguito a questa lettera Gibbs decise di studiare il fenomeno e descrisse i suoi risultati in una lettera a Nature nel 1899.

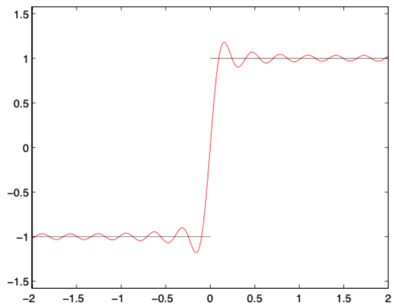
Illustriamo il fenomeno con un esempio

Esempio. [Onda quadra di ampiezza 1]

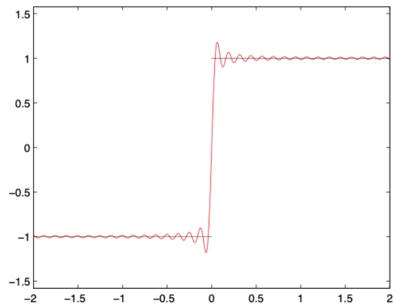
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il prolungamento 2π-periodico della restrizione a $[-\pi, \pi]$ della funzione

$$g(x) = \begin{cases} -1\,, & \text{se} \quad -\pi < x \leq 0, \\ 1\,, & \text{se} \quad 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

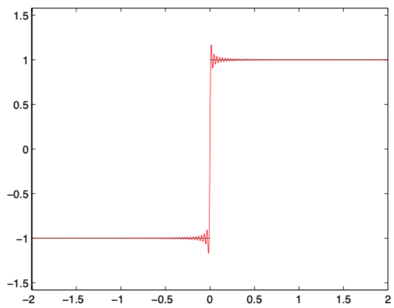
La figura rappresenta il grafico della funzione e quello dei relativi polinomi di Fourier di grado 20, 50 e 200. Questi grafici sono stati ottenuti utilizzando il programma Matlab.



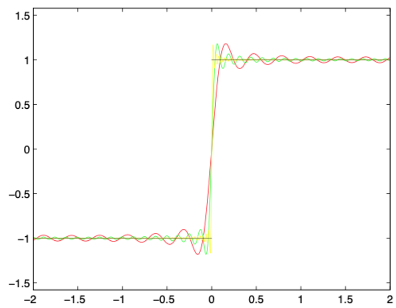
(a) f, $S_{20}(f)$



(b) f, $S_{50}(f)$



(c) f, $S_{200}(f)$



(d) f, $S_{20}(f)$, $S_{50}(f)$, $S_{200}(f)$

Figura 1: Somme di Fourier

Si è visto in precedenza che il polinomio trigonometrico avente per coefficienti i coefficienti di Fourier di f minimizza lo scarto quadratico medio. Anche per la serie di Fourier di f in forma complessa si può far vedere che lo scarto

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\gamma_n e^{in\omega_0 x}\right|^2 dx.$$

è minimo prendendo i coefficienti $\gamma_n = c_n$, ove

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega_0 x}\,dx.$$

Se f è continua si può anche minimizzare, invece dello scarto quadratico, il massimo dell'errore, cioè la quantità

$$\max_{|x|<T/2}\left|f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\gamma_n e^{in\omega_0 x}\right|.$$

In questo caso si ottiene (ma non lo dimostriamo)

$$\gamma_n = (1-\frac{|n|}{N})c_n.$$

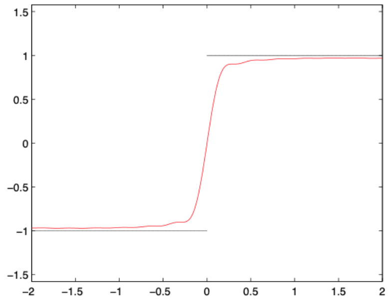
Si ottiene una serie in cui le corrispondenti somme parziali, dette *somme di Fejér*[2], sono date da

$$S_N^F := \sum_{n=-N}^{N}(1-\frac{|n|}{N})c_n e^{in\omega_0 x}.$$

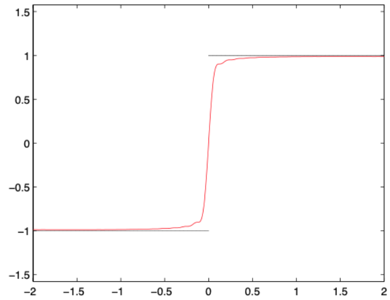
Queste somme non presentano il fenomeno di Gibbs che hanno invece le somme parziali costruite con i coefficienti di Fourier c_n. In questo caso, rispetto a prima, si favoriscono i coefficienti a frequenza più bassa.

Mostriamo come, nell'esempio dell'onda quadra considerato sopra, utilizzando le somme di Fejér al posto dei polinomi di Fourier, scompaiano le forti oscillazioni in prossimità dei punti di discontinuità (i grafici sono ancora ottenuti usando Matlab).

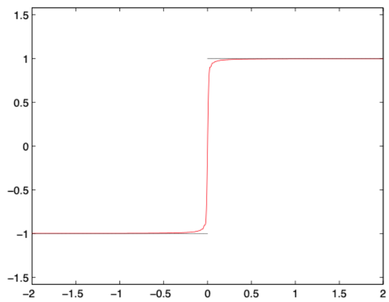
[2] Leopold Fejér, matematico ungherese (1880-1959)



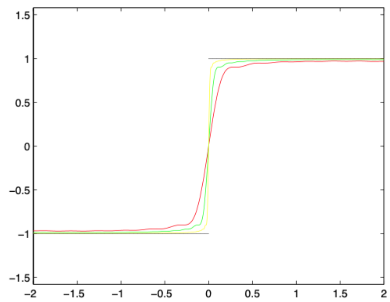
(a) f, $\sigma_{20}(f)$



(b) f, $\sigma_{50}(f)$



(c) f, $\sigma_{200}(f)$



(d) f, $\sigma_{20}(f)$, $\sigma_{50}(f)$, $\sigma_{200}(f)$

Figura 2: Somme di Fejér

Introduzione alle equazioni differenziali alle derivate parziali

Per mezzo di equazioni differenziali ordinarie possiamo costruire modelli matematici di fenomeni che descrivono, ad esempio, l'evoluzione temporale di sistemi il cui stato può essere descritto da un numero finito di parametri. Invece, se vogliamo descrivere ad esempio la configurazione di una corda ad un generico istante, dobbiamo descrivere la posizione di *tutti* i suoi punti in quell'istante; dobbiamo cioè trovare una funzione che dipenda sia dal tempo che dalla posizione e tener conto che le leggi della Fisica stabiliscono anche dei legami tra le derivate temporali e spaziali di questa funzione. L'evoluzione della corda è quindi descritta da un'equazione che è chiamata *equazione differenziale alle derivate parziali.*

Più in generale, una equazione alle derivate parziali (scriveremo EDP) è una relazione della forma

$$F(x, y, t, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots) = 0\,, \tag{4}$$

dove F è una funzione delle variabili $x, y, t, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots$. Una soluzione della (4) è una funzione $u(x, y, t, \dots)$ delle variabili indipendenti $x, y, t, \dots$, definita in un aperto connesso, tale che sostituita nell'equazione insieme a tutte le sue derivate parziali la rende una identità. Per semplificare la scrittura di una EDP, si è soliti usare le seguenti notazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x\ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y\ , \frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \cdots \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}\ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}\ , \dots .$$

Si preferisce perciò scrivere l'equazione (4) nella forma

$$F(x, y, t, u, \dots, u_x, u_y, u_t, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0\,.$$

Una *soluzione* dell'equazione è una funzione di due o più variabili che soddisfa identicamente l'equazione data. Per esempio, la funzione $u(x, y) = e^{3x+4y}$ soddisfa identicamente l'equazione $16u_{xx} - 9u_{yy} = 0$. Negli esempi che consideremo in questi appunti useremo quasi esclusivamente $x, y, \dots$ come variabili spaziali mentre t indicherà il tempo.

La *soluzione (o integrale) generale* dell'equazione è la famiglia di tutte le sue soluzioni. L'equazione si dirà di *ordine* n se n è l'ordine massimo delle derivate che vi compaiono. Si dirà *lineare* se è lineare in u e nelle sue derivate e si dirà *quasi lineare* se è lineare (solo) nelle derivate di ordine massimo.

Nel seguito, ci occuperemo soltanto di EDP del primo e del secondo ordine.

Esempi.

$$u_t + uu_x = 0 \qquad \text{(quasi lineare del prim'ordine)}$$

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z) \qquad \text{(lineare del second'ordine)}$$

$$u_{xx}\, u_{yy} - u_{xy}^2 = f(x, y) \qquad \text{(non quasi lineare)}$$

Vediamo ora due esempi semplici di risoluzione di EDP del prim'ordine. Supponiamo che le funzioni considerate siano sufficientemente regolari in modo che le operazioni di derivazione che si fanno su di esse abbiano senso.

Esempio 1.

Cerchiamo le soluzioni $u(x, t)$ dell' equazione

$$u_x = 0.$$

Le soluzioni dovranno essere costanti rispetto a x e quindi si avrà

$$u(x,t) = w(t),$$

dove w è una arbitaria funzione di t.

Esempio 2.

L'equazione

$$u_x - u_t = 0$$

si riconduce a una del tipo precedente col seguente cambiamento di variabili

$$x + t = \xi, \quad x - t = \eta.$$

Ponendo $u(x,t) = \omega(\xi,\eta)$ e derivando si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \omega}{\partial \eta},$$

per cui l'equazione data diventa

$$2\omega_\eta = 0,$$

il cui integrale generale, per quanto appena visto, è

$$\omega(\xi,\eta) = w(\xi).$$

Tornando alle variabili x e t, si ottiene

$$u(x,t) = w(x+t).$$

Più in generale, si può considerare l'equazione

$$\alpha u_x + \beta u_t = 0, \, \alpha, \, \beta \in \mathbb{R},$$

che si riconduce al caso dell'Esempio 1 col cambiamento di variabili

$$\beta x - \alpha t = \xi, \quad \beta x + \alpha t.$$

La soluzione avrà la forma

$$u(x,t) = w(\beta x - \alpha t).$$

Essa rappresenta il propagarsi di un'onda con velocità α/β, dove velocità positiva significa propagazione nel senso delle x crescenti, velocità negativa in quello contrario; in due punti x_1 e x_2 tali che $|x_1 - x_2| = L$ la stessa onda verrà osservata con uno scarto di tempo di $L\beta/\alpha$.

Esempio 3. Consideriamo l'equazione del second'ordine lineare

$$u_{xy} = 0.$$

Poiché la derivata di u_x rispetto a y è uguale a 0, ne segue che $u_x = \Phi(x)$. Integrando u_x rispetto a x si ottiene

$$u(x, y) = \int \Phi(x)dx + \psi(y).$$

Perciò l'integrale generale dell'equazione è dato da

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

dove $\varphi(x)$ è una qualunque primitiva di $\Phi(x)$. $\square$

Negli esempi precedenti abbiamo ricavato in modo elementare l'integrale generale delle equazioni considerate. Esso dipende da un certo numero di funzioni arbitrarie. Nelle applicazioni dobbiamo spesso risolvere problemi che consistono in equazioni differenziali accompagnate da condizioni che fanno selezionare alcune soluzioni particolari. Nei problemi associati alle equazioni differenziali **ordinarie** il procedimento è il seguente: si cerca l'integrale generale che dipende da un certo numero di **costanti** arbitrarie; si determinano le costanti tramite le condizioni (ad esempio, posizione iniziale o posizione e velocità iniziali, nel caso del problema di Cauchy). Siamo così ricondotti a risolvere equazioni algebriche o trascendenti che hanno però sempre un numero **finito** di incognite. Nei problemi invece associati a equazioni alle **derivate parziali**, l'integrale generale dipende da **funzioni** arbitrarie che spesso non si riescono a calcolare. Per tentare di risolvere il problema, si preferisce allora tener conto subito delle condizioni (o di una parte di esse) in modo da limitare il campo in cui cercare l'integrale generale. Questo procedimento verrà usato nei due esempi sull' equazione della corda vibrante e su quella del calore che seguono.

7^a settimana - 7-8.11.19

Presentiamo ora un'applicazione delle serie di Fourier alle equazioni alle derivate parziali. Non possiamo in questo corso approfondire troppo lo studio delle EDP. Ci limitiamo a mostrare come gli strumenti sviluppati nelle pagine precedenti siano in alcuni casi di aiuto per risolverle.

L'equazione delle onde

La dinamica di una corda di uno strumento musicale di lunghezza $L > 0$, fissata nei suoi due estremi, può essere descritta da una funzione $u(x,t)$ che rappresenta la deviazione della corda rispetto alla sua posizione di equilibrio nel punto $x \in [0, L]$ e al tempo t. Se u è sufficientemente piccolo rispetto alla lunghezza L e se si trascura lo smorzamento, l'accelerazione u_{tt} risulta proporzionale a u_{xx}. Supponiamo, ad esempio, di pizzicare la corda al tempo $t = 0$ e vogliamo determinare l'evoluzione temporale del fenomeno. L'azione al tempo $t = 0$ avrà portato la corda in una certa posizione $u_0(x)$ con una certa velocità iniziale $v_0(x)$. Dovremo perciò trovare una funzione $u(x,t)$ che risolve il seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt} = \sigma^2 u_{xx} & \text{se } 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{se } 0 < x < L \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{se } 0 < x < L. \end{cases}$$

Le funzioni u_0 e v_0 e sono date e sono supposte continue a tratti in $[0, L]$: sono chiamate le *condizioni iniziali.* Le condizioni in $x = 0$ e $x = L$ sono dette *condizioni al contorno* o *dati al bordo* e, in questo esempio, esprimono il fatto che la corda non può muoversi nei punti estremi dell'intervallo. La costante $\sigma > 0$ dipende dalle proprietà della corda (materiale, tensione, ecc.). L'equazione è detta *equazione della corda vibrante* ed è il caso particolare in cui la variabile spaziale è unidimensionale di una equazione più generale detta *equazione delle onde.* Proviamo prima a risolvere il problema al bordo, cioè

$$\begin{cases} u_{tt} = \sigma^2 u_{xx} & \text{se } 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

che è lineare e omogeneo. Cerchiamo una soluzione nella forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, dove X e T sono funzioni di una sola variabile e da determinarsi. Procedendo in maniera formale si ha

$$X(x)T''(t) = \sigma^2 X''(x)T(t),$$

da cui

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Essendovi a sinistra una funzione della sola t e a destra una della sola x, l'uguaglianza vale se le due funzioni sono costanti. Si possono avere tre casi:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2 < 0, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \beta^2 > 0, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = 0.$$

Dalle condizioni iniziali si ottiene $X(0)T(t) = u(0,t) = 0$ e $X(L)T(t) = u(L,t) = 0$, da cui $X(0) = X(L) = 0$.

Il primo dei tre casi porta a studiare il problema

$$\begin{cases} X'' + \alpha^2 X = 0 & \text{se } 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}$$

Come già visto in precedenza, la soluzione generale dell'equazione è $X(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$, da cui, imponendo le condizioni $X(0) = X(L) = 0$ si ottiene $c_1 = 0$ e, poiché la soluzione nulla non ci interessa, avremo $\operatorname{sen}(\alpha L) = 0$ che è soddisfatta se e solo se $\alpha L = n\pi$ per $n \in \mathbb{N}$. Troviamo, quindi, infinite soluzioni del problema

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Per determinare le soluzioni corrispondenti $T_n(t)$, si risolve l'equazione

$$\frac{T_n''(t)}{T_n(t)} = \sigma^2 \frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = -\frac{n^2\pi^2\sigma^2}{L^2},$$

da cui

$$T_n'' + \frac{n^2\pi^2\sigma^2}{L^2} T_n(t) = 0$$

e, quindi,

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi\sigma t}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\sigma t}{L}\right).$$

Abbiamo trovato perciò infinite soluzioni del problema al bordo lineare date da

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi\sigma t}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\sigma t}{L}\right).\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Per giustificare il procedimento formale seguito, è sufficiente verificare che si tratta effettivamente di soluzioni sostituendo nell'equazione differenziale. In maniera analoga, considerando i due problemi

$$\begin{cases} X'' - \beta^2 X = 0 & \text{se } 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} X'' = 0 & \text{se } 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}$$

si trova solo la soluzione banale $X \equiv 0$.

Come osservato sopra, qualsiasi combinazione lineare di u_n è ancora soluzione e quindi, sempre procedendo in modo formale, si può prendere come soluzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\big) \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big),$$

dove si è posto $\omega_0 = \frac{\pi\sigma}{L}$. Scegliamo ora i coefficienti A_n e B_n in modo che siano soddisfatte anche le due condizioni iniziali $u(x,0) = u_0(x)$ e $u_t(x,0) = v_0(x)$ se $0 < x < L$. Si ha

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) = u_0(x) \quad 0 < x < L$$

e

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\omega_0 B_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) = v_0(x) \quad 0 < x < L.$$

Le serie delle due formule precedenti coincidono con serie di Fourier di funzioni dispari di periodo $2L$. Perciò, estendendo u_0 e v_0 a $\mathbb{R}$ come funzioni dispari e periodiche di periodo $2L$, si scelgono gli A_n uguali ai coefficienti di Fourier di u_0 e gli $n\omega_0 Bn$ uguali a quelli di v_0, cioè

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi\sigma}\int_0^L v_0(x) \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) dx.$$

Sotto opportune ipotesi sui dati iniziali u_0 e v_0, si potrebbe provare che la serie di Fourier è convergente e che la sua somma è effettivamente soluzione del problema considerato.

Osserviamo che $u(x,t)$ è periodica rispetto a t di periodo $\omega_0 t$. La "frequenza fondamentale" ω_0 dipende dalle proprietà materiali della corda (tramite σ) e dalla sua lunghezza (più piccolo è L, più alta diventa la frequenza e più acuto è il suono).

L'equazione del calore

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} & \text{se } 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = 1 - x & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

La soluzione $u(x,t)$ rappresenta la temperatura nel punto x e al tempo t di una sbarra di metallo di lunghezza 1; la costante $k>0$ dipende dalle proprietà della sbarra ($k=\frac{K}{\sigma\tau}$, dove K è la conduttività termica, σ è il calore specifico e τ la densità di massa). L'equazione considerata è detta *equazione del calore*. La condizione iniziale dice che al tempo $t=0$ la sbarra ha temperatura $u_0(x)=1-x$; il valore 0 all'estremo $x=0$ significa che la sbarra è isolata dal punto di vista termico mentre all'estremo $x=1$ la temperatura è mantenuta costante e uguale a 0. Procediamo come nell'esempio precedente separando le variabili, cioè cercando una soluzione nella forma $u(x,t)=X(x)T(t)$ del problema lineare omogeneo

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & \text{se } 0<x<1, \quad t>0 \\ u_x(0,t)=u(1,t)=0 & \text{se } t>0. \end{cases}$$

Si ha

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)} = costante,$$

da cui si ottengono i tre casi:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2 < 0, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \beta^2 > 0, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = 0.$$

Dalle condizioni iniziali si deduce $X'(0)=X(1)=0$.

Il primo dei tre casi porta a studiare il problema

$$\begin{cases} X'' + \alpha^2 X = 0 & \text{se } 0<x<1, \\ X'(0)=X(1)=0, \end{cases}$$

da cui $X(x) = c_1\cos(\alpha x) + c_2\operatorname{sen}(\alpha x)$ e, imponendo le condizioni $X'(0) = X(1) = 0$, si ottiene $\lambda\cos\alpha = 0$. Ci sono perciò infinite soluzioni non banali, corrispondenti a

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(1+2n)\pi}{2},$$

date da

$$X_n(x) = \cos\Big(\frac{(1+2n)\pi x}{2}\Big), \quad n\in\mathbb{N}$$

Come nell'esempio precedente, si verifica facilmente che negli altri due casi si ottiene solo la soluzione nulla. Passando a risolvere l'equazione in $T_n(t)$, si ha

$$T_n'(t) = -\frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2 k T_n(t)$$

e, quindi,

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2 kt}.$$

Cerchiamo una soluzione del problema nella forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-\frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2 kt} \cos\Big(\frac{(1+2n)\pi x}{2}\Big).$$

I coefficienti A_n dovranno soddisfare la condizione

$$u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\Big(\frac{(1+2n)\pi x}{2}\Big) = 1 - x, \quad 0 < x < 1.$$

La serie ottenuta non rappresenta però uno degli sviluppi in serie di Fourier considerati. D'altra parte, osserviamo che le funzioni $X_n(x)$ sono in realtà definite su tutto $\mathbb{R}$, pari rispetto a $x = 0$ e dispari rispetto a $x = 1$, cioè

$$X_n(x) = X_n(-x), \quad X_n(x) = -X_n(2-x).$$

Estendiamo il dato iniziale $u_0(x) = 1 - x$ allo stesso modo in $[-2, 2)$ e per periodicità su tutto $\mathbb{R}$ e chiamiamo $\widetilde{u}_0$ questa estensione. Si ottiene

$$\widetilde{u}_0(x) = 1 - |x - 4k|, \quad x \in [-2 + 4k, 2 + 4k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lo sviluppo in serie di Fourier di $\widetilde{u}_0$ è dato da

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\Big(\frac{k\pi x}{2}\Big), \text{ dove } a_k = \int_0^2 (1-x)\cos\Big(\frac{k\pi x}{2}\Big).$$

Calcolando i coefficienti si ottiene

$$a_{2n} = 0, \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = \frac{2}{\pi^2(2n+1)^2},\, n \in \mathbb{N}$$

e, ponendo $k = 2n + 1$, si ha

$$\widetilde{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^2(2n+1)^2} \cos\Big(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\Big),$$

che coincide con la serie che rappresenta $u(x, 0)$ con $A_n = a_{2n+1}$. La soluzione formale del nostro problema è quindi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^2(2n+1)^2} e^{-\frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2 kt} \cos\Big(\frac{(1+2n)\pi x}{2}\Big).$$

Si tratterebbe infine di provare (ma non lo facciamo) che tale serie è convergente e che la sua somma per $(x, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty)$ è effettivamente soluzione del problema.

Problema di Cauchy per equazioni alle derivate parziali del prim'ordine lineari e quasi lineari

Nello studio di EDP del prim'ordine considereremo, per semplicità, solo il caso di funzioni di due variabili indipendenti, (x, y).

Ci occuperemo di equazioni quasi lineari, che scriveremo nella forma

$$P\big(x, y, u(x, y)\big)u_x(x, y) + Q\big(x, y, u(x, y)\big)u_y(x, y) = R\big(x, y, u(x, y)\big),$$

dove P, Q, R sono funzioni di classe C^1 definite su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. In particolare, nel caso in cui l'equazione è lineare, scriveremo

$$A(x, y)u_x(x, y) + B(x, y)u_y(x, y) + C(x, y)u(x, y) = D(x, y),$$

con A, B, C, D di classe C^1 su un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Osservazione. Osserviamo subito il seguente fatto. Sia $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che grad G $\neq 0$. L'equazione

$$G(x, y, z) = c\ , \quad c \in \mathbb{R}\ ,$$

definisce, al variare di c, una famiglia di superfici. Sia ora $(x, y) \mapsto u(x, y)$ una funzione di due variabili di classe C^1 e supponiamo che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) : z = u(x, y)\},$$

descritto dall'equazione del grafico di u, sia una superficie ortogonale alla famiglia di superfici $G^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$. Posto $F(x, y, z) = u(x, y) - z$, si ha che i gradienti di F e di G sono tra loro ortogonali nei punti di intersezione delle due superfici. In tali punti si ha perciò $\langle \nabla G, \nabla F\rangle = 0$. Essendo $\nabla G(x, y, z) = \big(G_x(x, y, z), G_y(x, y, z), G_z(x, y, z)\big)$ e $\nabla F(x, y, z) = \big(u_x(x, y), u_y(x, y), -1\big)$ si ottiene l'equazione

$$G_x\left(x, y, u\left(x, y\right)\right)\ u_x\left(x, y\right) + G_y\left(x, y, u\left(x, y\right)\right) u_y\left(x, y\right) = G_z\left(x, y, u\left(x, y\right)\right)$$

che, come si può osservare, ha la stessa struttura dell'equazione quasi lineare considerata sopra.

Nelle equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine, il problema di Cauchy consiste nella ricerca di una soluzione dell'equazione il cui grafico passi per un punto assegnato (x_0, y_0). Si cerca cioè una soluzione $y(x)$ tale che $y(x_0) = y_0$. Nelle equazioni alle derivate parziali del prim'ordine, esso consiste nel cercare una soluzione il cui grafico contenga una curva assegnata.

Più precisamente, siano dati un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ su cui sono definite le funzioni P, Q, R ed una curva $\Gamma\colon I \to \Omega$ di classe C^1 in un intervallo I di $\mathbb{R}$, definita da $\tau \mapsto \big(\varphi(\tau), \psi(\tau), \sigma(\tau)\big)$. Consideriamo, inoltre, la curva in $\mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(\tau) = \big(\varphi(\tau), \psi(\tau)\big)$ proiezione ortogonale di Γ sul piano xy.

Definizione. Diremo che $u \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, di classe C^1, $(x, y) \mapsto u(x, y)$ è una soluzione (locale) del *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y = R\big(x,y,u\big) \\ u(\varphi(\tau),\psi(\tau)) = \sigma(\tau), \quad \forall \tau \in I \end{cases}$$

se esiste un intorno $\widetilde{U} \subseteq U$ di $\gamma(I)$ tale che u è una soluzione dell'equazione differenziale in $\widetilde{U}$ che soddisfa la condizione $u(\varphi(\tau),\psi(\tau)) = \sigma(\tau)$ identicamente in I.

In altre parole, la condizione iniziale richiede che la soluzione u assuma i valori $\sigma(\tau)$ lungo la curva $\gamma(\tau)$.

Per cercare di trovare una soluzione del problema dato, riconduciamoci all'osservazione precedente. Poiché $(u_x, u_y, -1)$, nel punto $\big(x, y, u(x, y)\big)$, è ortogonale alla superficie $z = u(x, y)$, cioè è ortogonale al piano tangente alla superficie, e poiché, in quello stesso punto, il campo vettoriale (P, Q, R) è ortogonale a $(u_x, u_y, -1)$, dovrà risultare che (P, Q, R) appartiene al piano tangente alla superficie. Quindi, per ogni fissato $\tau \in I$, siamo ricondotti a cercare una curva sulla superficie $z = u(x, y)$ che passi per $\big(\varphi(\tau), \psi(\tau), \sigma(\tau)\big)$ e la cui tangente sia (P, Q, R). Dobbiamo perciò risolvere il seguente problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine

$$\begin{cases} x'(t) = P\,(x,y,z) \\ y'(t) = Q\,(x,y,z) \\ z'(t) = R\,(x,y,z) \\ \big(x(0), y(0), z(0)\big) = \big(\varphi(\tau), \psi(\tau), \sigma(\tau)\big)\,. \end{cases}$$

Tale problema, essendo i dati di classe C^1, ammette una e una sola soluzione locale, per ogni valore di τ. Le soluzioni del problema sopra, al variare di t, sono curve che appartengono alla superficie $z = u(x, y)$, soluzione della EDP. Esse sono chiamate *curve caratteristiche* dell'equazione.

L'idea è quella di "incollare", al variare di τ, le diverse curve ottenute, in modo da descrivere le equazioni di una superficie parametrizzata dalla coppia (τ, t). Tale superficie parametrica è effettivamente il grafico di una soluzione $z = u(x, y)$ del problema considerato se il vettore normale ad essa non appartiene al piano xy. Inoltre, affinché la soluzione sia univocamente determinata occorre che la curva $\Gamma(\tau)$ assegnata non sia essa stessa una curva caratteristica. In altre parole, per ogni τ, il campo vettoriale $F = (P, Q, R)$, valutato in $\Gamma(\tau)$, non deve essere tangente a $\Gamma(\tau)$. Una condizione che assicura ciò, è che sia non nulla la componente lungo l'asse z del prodotto vettoriale

$$F(\varphi(\tau), \psi(\tau), \sigma(\tau)) \wedge \left(\varphi'(\tau), \psi'(\tau), \sigma'(\tau)\right),$$

cioè

$$P(\varphi(\tau), \psi(\tau), \sigma(\tau))\psi'(\tau) - Q(\varphi(\tau), \psi(\tau), \sigma(\tau))\varphi'(\tau) \neq 0\,.$$

Questa condizione equivale a dire che le proiezioni di (P, Q, R) e di Γ' sul piano xy non devono essere parallele.

Osservazione. Nel caso delle equazioni lineari della forma

$$A(x, y)u_x(x, y) + B(x, y)u_y(x, y) + C(x, y)u(x, y) = D(x, y),$$

considerate precedentemente, la condizione sopra si semplifica e diventa

$$A(\gamma(\tau)\psi'(\tau) - B(\gamma(\tau))\varphi'(\tau) \neq 0\,. \tag{5}$$

Enunciamo ora il seguente teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy.

Teorema. (Esistenza e unicità)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $I \subseteq \mathbb{R}$, $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$, $P, Q, R\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *come sopra e sia* $\tau_0 \in I$ *tale che*

$$P(\varphi(\tau_0), \psi(\tau_0), \sigma(\tau_0))\psi'(\tau_0) - Q(\varphi(\tau_0), \psi(\tau_0), \sigma(\tau_0))\varphi'(\tau_0) \neq 0\,.$$

Allora, esistono un intorno U *di* $(\varphi(\tau_0), \psi(\tau_0))$ *in* $\mathbb{R}^2$, *un intorno* $I(\tau_0) \subset I$ *di* τ_0 *ed un'unica funzione* $u\colon U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto u(x, y)$, *tale che*

i) $(x, y, u(x, y)) \in \Omega$ *per ogni* $(x, y) \in U$;

ii) u *è soluzione del problema di Cauchy per ogni* $(x, y) \in U$ *e* $\tau \in I(\tau_0)$.

Esempio.

Trovare una soluzione locale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (y + u)\, u_x + y u_y = x - y \\ u\,(x, 1) = 1 + x. \end{cases}$$

In questo esempio la condizione iniziale del problema di Cauchy, cioè $u\,(x, 1) = 1 + x$, non è data esprimendo la curva con delle equazioni parametriche. Per metterlo nella forma richiesta basta però porre $\Gamma(\tau) = \big(\varphi(\tau), \psi(\tau), \sigma(\tau)\big) = (\tau, 1, 1+\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Il campo vettoriale (P, Q, R) è dato da $(x, y, z) \mapsto (y+z, y, x-y)$. Per ogni $\tau \in \mathbb{R}$ si ha

$$P\left(\Gamma\left(\tau\right)\right)\psi'\left(\tau\right) - Q\left(\Gamma\left(\tau\right)\right)\varphi'\left(\tau\right) = -1 \neq 0,$$

e dunque il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione locale. Cerchiamo adesso la soluzione. Per trovare le curve caratteristiche $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ dobbiamo risolvere il problema di Cauchy del seguente sistema di tre equazioni ordinarie nella variabile indipendente t

$$\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = y, \\ z' = x - y, \\ \left(x\left(0\right), y\left(0\right), z\left(0\right)\right) = \left(\tau, 1, 1+\tau\right) \,. \end{cases}$$

La seconda equazione ci dice che $y\left(t\right) = k_1\left(\tau\right)e^t$ dove la costante $k_1 = k_1\left(\tau\right)$ dipende dalla scelta del punto sulla curva assegnata, cioè dalla scelta di τ. Derivando la prima equazione, sostituendovi la seconda e la terza e l'espressione di $y(t)$ si ottiene

$$x'' - x = 0,$$

da cui segue $x(t) = k_2(\tau)e^{-t} + k_3(\tau)e^t$. Sostituendo infine nella terza equazione si ha $z\left(t\right) = -k_2(\tau)e^{-t} + \big(k_3(\tau) - k_1(\tau)\big)e^t + k_4(\tau)$. Le costanti di integrazione sono quattro perché abbiamo derivato la prima equazione. Per trovare la soluzione del problema dato, sostituiamo le funzioni trovate nella prima equazione. Si ha

$$-k_2(\tau)e^{-t} + k_3(\tau)e^t = k_1\left(\tau\right)e^t + -k_2(\tau)e^{-t} + \big(k_3(\tau) - k_1(\tau)\big)e^t + k_4(\tau),$$

da cui si ottiene $k_4\left(\tau\right) \equiv 0$.

La condizione iniziale ci permette di determinare i coefficienti k_i. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x\left(0\right) = k_2 + k_3 = \tau, \\ y\left(0\right) = k_1 = 1, \\ z\left(0\right) = -k_2 + k_3 - k_1 = 1 + \tau. \end{cases}$$

si ha $k_1(\tau) = 1$, $k_2(\tau) = -1$, $k_3(\tau) = 1 + \tau$, da cui si ottiene la seguente rappresentazione parametrica della superficie soluzione

$$(t, \tau) \to \big(-e^{-t} + (1+\tau)e^t, e^t, e^{-t} + \tau e^t\big).$$

Eliminando i parametri t e τ, si ottiene $z = x - y + \dfrac{2}{y}$, che è l'espressione in forma cartesiana del grafico della soluzione.

La soluzione del problema di Cauchy è quindi la funzione

$$u(x, y) = x - y + \frac{2}{y}$$

nell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ (infatti il dominio della soluzione deve essere un insieme connesso che contiene la retta $y = 1$ della condizione iniziale).

Osservazione. Supponiamo che in τ_0 la condizione espressa nel teorema di esistenza e unicità non sia soddisfatta, risulti cioè

$$P(\varphi(\tau_0), \psi(\tau_0), \sigma(\tau_0))\psi'(\tau_0) - Q(\varphi(\tau_0), \psi(\tau_0), \sigma(\tau_0))\varphi'(\tau_0) = 0\,.$$

Se P e Q non si annullano contemporaneamente, allora esiste $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, tale che

$$\begin{cases} \mu P\big(\Gamma(\tau_0)\big) = \varphi'(\tau_0) \\ \mu Q\big(\Gamma(\tau_0)\big) = \psi'(\tau_0). \end{cases}$$

Proviamo che se $\mu R\big(\Gamma(\tau_0)\big) \neq \sigma'(\tau_0)$, il problema di Cauchy non ha soluzione in alcun intorno di $(\varphi(\tau_0), \psi(\tau_0))$.

Infatti, supponiamo per assurdo che esista una soluzione locale del problema di Cauchy con condizione iniziale $u(\varphi(\tau_0), \psi(\tau_0)) = \sigma(\tau_0)$. Poniamo $v(\tau) = u(\varphi(\tau), \psi(\tau))$. Derivando si ha

$$v'(\tau) = u_x(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + u_y(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau),$$

da cui, ponendo $\tau = \tau_0$, si ottiene $v'(\tau_0) = \mu R\big(\Gamma(\tau_0)\big)$. D'altra parte, si ha anche $\sigma'(\tau_0) = v'(\tau_0)$ e, quindi, $\mu R\big(\Gamma(\tau_0)\big) = \sigma'(\tau_0)$ contro l'ipotesi. Perciò il problema di Cauchy non ha soluzione. Se invece τ_0 è tale che $\mu R\big(\Gamma(\tau_0)\big) = \sigma'(\tau_0)$, si potrebbe provare che il problema di Cauchy ha infinite soluzioni.

8^a settimana - 14-15.11.19

Il seguente corollario del teorema di esistenza e unicità è utile nelle applicazioni

Corollario. *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} P(x,y,u)u_x + u_y = R(x,y,u), \\ u(x,0) = h(x), \end{cases}$$

dove P, Q, h sono di classe C^1 ed h è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ammette una e una sola soluzione locale.

Dimostrazione. Sia Γ la curva definita dalle equazioni parametriche $\Gamma(\tau) = (\varphi(\tau), \psi(\tau), \sigma(\tau)) = (\tau, 0, h(\tau))$. Si ha

$$P\left(\Gamma\left(\tau\right)\right)\psi'\left(\tau\right) - Q\left(\Gamma\left(\tau\right)\right)\varphi'\left(\tau\right) = -1 \neq 0$$

da cui, applicando il teorema di esistenza e unicità, si conclude. □

Leggi di conservazione

Partiamo da un esempio fisico. Supponiamo di avere un fluido disposto lungo l'asse x (l'assunto è fatto per comodità, quello che è importante è che il fenomeno sia unidimensionale) e sia $u\left(x,t\right)$ la densità di massa del fluido nel punto x e al tempo t.

Fissiamo un tratto di tubo $I = [x_1, x_2]$. Se non vi è dispersione di fluido in questo tratto, la massa contenuta in I al tempo t è data da

$$\int_{x_1}^{x_2} u\left(x,t\right) dx \ .$$

Il fluido può entrare od uscire dal tubo solo agli estremi x_1 e x_2 e supponiamo che la quantità in ingresso (o uscita) sia una funzione della sola densità. Si ha perciò

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u\left(x,t\right) dx = f\big(u(x_1,t)\big) - f\big(u(x_2,t)\big),$$

dove abbiamo indicato con f la funzione che modella il passaggio del fluido all'estremità del tubo. Se u è C^1, dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale, si ottiene

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u\left(x,t\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} u_t\left(x,t\right) dx = f\big(u(x_1,t)\big) - f\big(u(x_2,t)\big).$$

Se f è di classe C^1 si ha, posto $\Phi(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)\,dx$ e per il Teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\Phi'(x_1) = u_t(x_1,t) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{\int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)\,dx}{x_2 - x_1}$$

$$= \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))}{x_2 - x_1} = -f'(u(x_1,t))\,u_x(x_1,t)\,,$$

da cui, per l'arbitrarietà del punto x_1, si ottiene l'equazione

$$u_t(x,t) + f'(u(x,t))\,u_x(x,t) = 0.$$

Una tale equazione differenziale è detta *legge di conservazione* in quanto permette di determinare una grandezza che non si può aggiungere o sottrarre dall'esterno del sistema, ma che si "conserva".

Più in generale, sono chiamate leggi di conservazione le equazioni quasi lineari del prim'ordine della forma

$$a(u)u_x + u_t = 0.$$

Noi studieremo solo il caso unidimensionale, questo significa che prenderemo in considerazione solo fenomeni che possono venire modellati da una sola variabile spaziale. Il problema di Cauchy, per tale equazione, assume la forma

$$\begin{cases} a(u)\,u_x + u_t = 0\,, \\ u(x,0) = h(x)\,, \end{cases}$$

dove a e h sono funzione assegnate di classe C^1.

Per il corollario precedente il problema ammette una e una sola soluzione locale. Per determinarla procediamo usando il metodo delle caratteristiche (chiameremo s la variabile di derivazione per non confonderla con la variabile tempo t).

$$\begin{cases} x'(s) = a(z), \\ t'(s) = 1, \\ z'(s) = 0, \\ (x(0), t(0), z(0)) = (\tau, 0, h(\tau))\,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo la seguente rappresentazione parametrica della soluzione

$$\begin{cases} x(s) = a(h(\tau))\,s + \tau, \\ t(s) = s, \\ z(s) = h(\tau). \end{cases}$$

Ne segue che z deve soddisfare l'equazione implicita

$$z = h\big(x - a(z)t\big).$$

Risolvendo questa equazione rispetto a z (quando possibile) otteniamo la soluzione locale $z = u\,(x,t)$ del problema di Cauchy. Il Teorema della Funzione Implicita (o Teorema del Dini) fornisce una condizione sufficiente affinché l'equazione sia esplicitabile rispetto a z in un intorno del punto $(x_0, 0, h(x_0))$. Posta

$$\Psi\,(x,t,z) = z - h\,(x - a\,(z)\,t)\,,$$

la condizione stabilisce che si abbia $\Psi_z(x_0, 0, h(x_0)) \neq 0$. Derivando rispetto a z si ha

$$\Psi_z(x,t,z) = 1 + h'\big(x - a(z)t\big)\,a(z)t$$

e, calcolando in $(x_0, 0, h(x_0))$, si ottiene $\Psi_z(x_0, 0, h(x_0)) = 1 \neq 0$.

Pertanto, per il Teorema della Funzione Implicita, esiste un intorno U di $(x_0, 0)$ ed una funzione $u\colon U \to \mathbb{R}$ tale che, posto $z = u\,(x,t)$, si abbia $\Psi\,(x,t,u\,(x,t)) \equiv 0$ per ogni $(x,t) \in U$.

Può accadere che in qualche punto $(x,t,h(x))$ la condizione sopra non sia soddisfatta. In tali punti la funzione u ha una discontinuità chiamata *shock* (o *urto*) e non rappresenta una soluzione, almeno nel senso in cui l'abbiamo definita, cioè di classe C^1. Lo è in un senso più ampio che non tratteremo in questo corso.

Esempio. Sia dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u\,u_x + u_t = 0, \\ u(x,0) = -x. \end{cases}$$

Per quanto visto sopra si ha

$$\Psi\,(x,t,z) = z + (x - zt) = 0,$$

da cui la soluzione è $z = u(x,t) = -\frac{x}{1-t}$ che ha un shock per $t = 1$.

Esercizio. Considerare la stessa equazione dell'esempio precedente con condizione iniziale $u(x,0) = h(x) = x$. Stabilire se ci sono punti di shock per qualche $t > 0$.

Flusso di automobili

Trattiamo un modello semplificato supponendo che le automobili siano prive di dimensioni e che il flusso del traffico sia come quello di un fluido in un tubo sottile di diametro costante.

Sia $\rho(x,t)$ la densità di traffico all'istante t nel punto di ascissa x (cioè il numero di auto per unità di lunghezza) e sia $q(x,t)$ il flusso all'istante t nel punto x (cioè il numero di auto per unità di tempo che all'istante t attraversano il punto x). Assumiamo, infine, che nel tratto di strada considerato non vi siano entrate o uscite.

Fissato un segmento di estremi x_1 e x_2 con $x_1 < x_2$ il numero di auto in esso contenuto è

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\, dx.$$

La variazione di questo numero, è uguale al numero di auto che entrano in questo segmento meno il numero di quelle che lo lasciano, cioè

$$-\int_{x_1}^{x_2} q_x(x,t)\, dx = q(x_1,t) - q(x_2,t) = \frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho_t(x,t)\, dx.$$

Si ha pertanto

$$\int_{x_1}^{x_2} (q_x(x,t) + \rho_t(x,t))\, dx = 0.$$

per l'arbitrarietà del segmento $[x_1, x_2]$ questo implica che

$$q_x(x,t) + \rho_t(x,t) = 0\,.$$

Introduciamo ora l'ipotesi, ragionevole, che il flusso dipenda in qualche modo dalla densità del traffico, cioè che $q(x,t) = G(\rho(x,t))$ per una qualche funzione G. L'equazione diventa perciò

$$G'(\rho(x,t))\, \rho_x(x,t) + \rho_t(x,t) = 0\,.$$

Quindi il modello considerato per il flusso del traffico lungo una strada si riduce ad una legge di conservazione. La funzione G dipende dalle caratteristiche della strada. Una legge empirica che si ricava dalle osservazioni è la seguente

$$G(\rho) = c\, \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right),$$

dove c è la velocità libera (cioè quella di un'auto che viaggia sola ed indisturbata) e corrisponde, nei casi normali, ai limiti di velocità, e ρ_1 è la densità massima di auto (quando, cioè, le macchine sono una a toccare l'altra). Con questa scelta di G e ponendo $u = \rho/\rho_1$ (densità normalizzata), l'equazione diventa

$$c(1-2u)\, u_x + u_t = 0.$$

Sia $h(x)$ la densità iniziale sul tratto di strada considerato. Lo studio dell'evoluzione del traffico è ricondotta allo studio di un problema di Cauchy con condizione

iniziale $u(x,0) = h(x)$.
Si può dimostrare che se h è decrescente non si verificano shock. Tuttavia, se h è crescente in qualche tratto, allora per qualche $t > 0$ si verificherà uno shock.

Esempi di condizioni iniziali sono

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad h(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}, \quad h(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctang} x.$$

Equazioni lineari del second'ordine

Torniamo ora a considerare le equazioni alle derivate parziali del second'ordine limitandoci al caso delle equazioni *lineari*. Nel caso di due variabili, l'equazione sarà della forma

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + D\,u_x + E\,u_y + F\,u = G(x,y),$$

dove i coefficienti $A, B, \ldots, F$ sono funzioni delle variabili indipendenti x e y (ma non di u) definite in un aperto di $\mathbb{R}^2$. Se $G = 0$ l'equazione si dice *omogenea*, altrimenti *non omogenea*. I coefficienti rappresentano in generale le proprietà fisiche del mezzo in cui si svolge il fenomeno descritto dall'equazione stessa, mentre il termine noto rappresenta le forze esterne che agiscono sul sistema. Se il mezzo è omogeneo e isotropo, i coefficienti sono costanti.

Queste equazioni vengono classificate a seconda del segno di $B^2 - 4AC$. Più precisamente, vengono dette

- *ellittiche* se $B^2 - 4AC < 0$;
- *paraboliche* se $B^2 - 4AC = 0$;
- *iperboliche*, se $B^2 - 4AC > 0$.

Ricordiamo infatti dalla geometria analitica, che l'equazione di secondo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ ,$$

dove $A, B, \ldots, F$ sono costanti, rappresentano una ellisse, una parabola o un'iperbole a seconda che $B^2 - 4AC$ sia < 0, $= 0$, > 0 rispettivamente. Poiché i coefficienti dell'equazione sono, in generale, funzioni, di x e y, è possibile che una EDP sia di *tipo misto*. Per esempio, l'equazione

$$xu_{xx} + yu_{yy} + 2yu_x - xu_y = 0$$

è ellittica se $xy > 0$, iperbolica se $xy < 0$, e parabolica se $xy = 0$. In altre parole, riferendosi a coordinate cartesiane nel piano xy, l'equazione è ellittica nel primo e terzo quadrante, iperbolica nel secondo e quarto e parabolica lungo gli assi coordinati.

La teoria delle equazioni di tipo misto è stata introdotta da Francesco Tricomi [3] nel 1923. Ad esempio, nello studio dei fluidi transonici, si considera la cosiddetta *equazione di Tricomi*

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \ .$$

Questa equazione è ellittica per $y > 0$ ed iperbolica per $y < 0$. In aerodinamica, la regione ellittica corrisponde ad un flusso subsonico, la regione parabolica alla barriera del suono e la regione iperbolica alla propagazione supersonica delle onde di shock.

La classificazione dell'equazione dipende solo dalla parte contenente le derivate seconde, cioè dal termine $A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy}$, che è detto *parte principale.* Più in generale, la classificazione è valida anche per equazioni lineari del second'ordine in dimensione $n > 2$, cioè equazioni della forma

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \dots, x_n) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n) u_{x_i} +$$

$$+ a(x_1, \dots, x_n) u = f(x_1, \dots, x_n).$$

In questo caso, si ottengono ancora equazioni che vengono chiamate ellittiche, iperboliche o paraboliche a seconda che la forma quadratica associata alla parte principale, che può sempre essere riportata alla forma canonica (cioè alla forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2$ contenente solo i quadrati delle indeterminate con $\lambda_i = 0, 1, -1$), sia definita, indefinita o semidefinita.

[3] Francesco Tricomi, matematico italiano (1897-1978)

9^a settimana - 21-22.11.19

Consideremo ora le "equazioni tipo" delle tre classi, supponendo le equazioni a coefficienti costanti, contenenti solo la parte principale dell'operatore e ridotte a forma canonica, cosa sempre possibile con un cambiamento di variabile.

Equazioni ellittiche

L'equazione tipo del caso ellittico è l'*equazione di Poisson*

$$\Delta u = f$$

o, nel caso omogeneo in cui $f = 0$, è l'*equazione di Laplace*

$$\Delta u = 0,$$

dove l'operatore Δ, detto *Laplaciano*, è dato in $\mathbb{R}^n$ [in $\mathbb{R}^2$] da

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots u_{x_nx_n} \quad [\Delta u = u_{xx} + u_{yy}]$$

Ricordiamo che si ha $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$. Infatti

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div}(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_ix_i}$$

I fenomeni descritti dalle equazioni ellittiche sono *stazionari*, cioè corrispondono a situazioni di equilibrio. Si presentano in svariati campi delle applicazioni come l'elasticità, l'elettrostatica, la cinematica dei fluidi, la termostatica, ecc.

Consideriamo, ad esempio, una membrana omogenea che, in posizione di riposo, occupa una regione Ω del piano xy la cui frontiera, $\partial\Omega$, è una curva che denotiamo con γ. Se applichiamo alla membrana, in ogni punto di Ω, una forza di densità $f(x, y)$ diretta ortogonalmente al piano xy, la membrana si incurver assumendo, nella nuova posizione di equilibrio, la forma di una superficie $u = u(x, y)$ (supponendo l'asse u perpendicolare al piano xy). Supponiamo per semplicità che lo spostamento sia solo verticale (cioè che il punto di coordinate $(x, y, 0)$ diventi nella nuova posizione di equilibrio $(x, y, u(x, y)))$ e che la variazione di u non sia troppo grande (cioè le derivate u_x e u_y siano piccole). Allora, lo spostamento verticale $u(x, y)$ soddisfa l'equazione

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad \text{in}\Omega.$$

Associati all'equazione i due problemi ai limiti più frequenti sono:

1) (problema di Dirichlet) trovare una soluzione $u(x, y)$ tale che $u = \varphi$ su $\partial\Omega$. Il significato di questa condizione è il seguente: trovare la posizione di equilibrio

della membrana sapendo che il suo bordo è fissato ad una curva Γ di equazioni parametriche $s \mapsto (x(s), y(s), \varphi(s))$, la cui proiezione sul piano xy coincide con $\gamma = \partial\Omega$ (cioè se $\varphi = 0$, allora $\Gamma = \gamma$).

2) (problema di Neumann) trovare una soluzione $u(x, y)$ tale che $\frac{\partial u}{\partial n} = \psi$, dove n è il versore normale a γ rivolto verso l'esterno di Ω. Il significato di questa condizione è il seguente: oltre alla densità superficiale f che agisce all'interno della membrana Ω, c'è anche una densità lineare ψ che agisce sempre in direzione verticale sul bordo della membrana. Sotto l'azione di queste forze il bordo è libero di muoversi verticalmente e la posizione di equilibrio (se esiste) è la soluzione del problema.

Se la membrana non è omogenea, si ottiene una equazione più generale a coefficienti variabili, ma sempre di tipo ellittico.

Equazioni paraboliche

L'equazione tipo del caso parabolico è

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f,$$

dove u è funzione delle $n + 1$ variabili $(x_1, \cdots, x_n, t)$, dove il Laplaciano opera solo sulle variabili $x_1, \ldots, x_n$ e la $(n + 1)$-esima variabile t spesso nelle applicazioni indica il tempo. Questa equazione è chiamata *equazione di diffusione* perchè descrive, sotto opportune ipotesi, la diffusione del calore nei corpi. La funzione incognita $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ rappresenta, ad esempio, la temperatura nel punto $(x_1, \ldots, x_n)$ all'istante t e il termine noto f la quantità di calore prodotta (o sottratta) da una sorgente presente nel corpo (per semplicità il coefficiente di diffusione è stato posto uguale a 1). La stessa equazione può descrivere anche la diffusione di un fluido in un dato ambiente e in questo caso la funzione u rappresenta la concentrazione del fluido.

Associati all'equazione, i due problemi ai limiti più frequenti sono (per semplicità supponiamo $n = 3$):

1) (problema di Cauchy - Dirichlet) determinare all'istante $t > 0$ la temperatura di un corpo che occupa una regione aperta Ω dello spazio, conoscendone la temperatura all'istante iniziale $t = 0$ e la temperatura del bordo ad ogni istante. Si ha cioè

$$u(x, y, z, 0) = h(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad \text{(condizione iniziale)}$$

$$u(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega,\ t > 0, \quad \text{(condizione tipo Dirichlet);}$$

2) (problema di Cauchy - Neumann) determinare la temperatura di un corpo come nel caso 1) conoscendo, invece che la temperatura sul bordo, la quantità di calore scambiata tra il corpo e l'ambiente circostante. Si ha cioè

$$u(x,y,z,0) = h(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \Omega, \quad \text{(condizione iniziale)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z,t) = \psi(x,y,z,t), \quad (x,y,z) \in \partial\Omega,\ t > 0, \quad \text{(condizione tipo Neumann)},$$

dove n è la normale esterna a $\partial\Omega$.

Equazioni iperboliche

L'equazione tipo del caso iperbolico è

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f,$$

dove, anche in questo caso, u è funzione delle $n+1$ variabili $(x_1, \dots, x_n, t)$. Questa equazione è chiamata *equazione delle onde* e interviene in molti campi tra cui elastodinamica, acustica, elettromagnetismo.

Un esempio di questa equazione è il caso della corda vibrante con estremi fissi, $u_{tt} = \sigma^2 u_{xx}$, già visto in precedenza.

Un altro esempio si ha considerando di nuovo la membrana descritta nel caso delle equazioni ellittiche soggetta ora ad una forza $f(x,y,t)$ dipendente anche dal tempo. La funzione $u(x,y,t)$, che descrive la forma della membrana all'istante t, soddisfa l'equazione differenziale

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = f.$$

Un problema tipico (detto di Cauchy-Dirichlet) associato all'equazione consiste nel trovare una soluzione per $t > 0$ (o per $t < 0$) conoscendo sia posizione e velocità iniziali (o finali) dei punti della membrana, cioè

$$\begin{cases} u(x,y,0) = h(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u_t(x,y,0) = k(x,y), & (x,y) \in \Omega. \end{cases}$$

che la posizione del bordo ad ogni istante

$$u(x,y,t) = \varphi(x,y,t), \quad (x,y) \in \partial\Omega, t > 0\,(t < 0).$$

Analogamente, possiamo considerare un problema di Cauchy-Neumann, dove l'ultima condizione sopra è sostituita da

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t) = \psi(x,y,t), \quad (x,y) \in \partial\Omega, t > 0\,(t < 0).$$

Generalità sui problemi al contorno

I problemi associati alle equazioni lineari del second'ordine considerate sopra si possono raccogliere nella seguente formulazione più generale: trovare una funzione u che soddisfi l'equazione

$$Lu = f$$

e un certo numero di condizioni iniziali e al contorno del tipo

$$L_1u = \varphi_1; \quad L_1u = \varphi_1; \quad \dots \quad L_ku = \varphi_k$$

Osserviamo che nei casi visti prima non solo l'equazione differenziale, ma anche le condizioni di Cauchy, Dirichlet e Neumann sono lineari. Si possono quindi riassumere l'equazione differenziale e le condizioni in un'unica equazione lineare

$$\Lambda u = \Phi$$

dove $\Lambda = (L, L_1, \dots, L_k)\colon X \to Y$ agisce tra due spazi vettoriali metrici X e Y da precisare a seconda del problema e $\Phi = (f, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ è un vettore assegnato in Y. Essendo l'equazione lineare vale il cosiddetto *principio di sovrapposizione*, cioè se u_1 e u_2 sono soluzioni corrispondenti ai dati Φ_1 e Φ_2 rispettivamente, allora $\alpha u_1 + \beta u_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ corrisponderà al dato $\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2$ e si avrà

$$\Lambda(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2.$$

In particolare, le soluzioni dell'equazione omogenea $\Lambda u = 0$ formano lo spazio vettoriale $\ker \Lambda$ che, a differenza del caso delle equazioni differenziali ordinarie, è di dimensione infinita.

Osservazione. Il principio di sovrapposizione non vale se l'equazione non è lineare. Ad esempio, le funzioni $u_1(x, y) = e^x$ e $u_2(x, y) = e^{-y}$ sono entrambe soluzioni dell'equazione differenziale $(u_x + u_y)^2 - u^2 = 0$, ma la loro somma non lo è.

Nello studio dell'equazione $\Lambda u = \Phi$ le questioni da studiare sono le seguenti:

- *Unicità della soluzione.* Si tratta provare che l'operatore Λ è iniettivo. Essendo l'equazione lineare questo è equivalente a provare che $\Lambda u = 0$ implica $u = 0$. Infatti, siano u_1 e u_2 tali che $\Lambda u_1 = \Phi$ e $\Lambda u_2 = \Phi$. Per la linearità si ottiene $\Lambda(u_1 - u_2) = 0$, da cui $u_1 - u_2 = 0$ cioè $u_1 = u_2$.
- *Esistenza di una soluzione.* Si tratta di provare che l'operatore Λ è suriettivo. Spesso per risolvere questo problema si cerca di risolvere dei sottoproblemi, considerando un dato per volta, e poi di usare il principio di sovrapposizione.

- *Stabilità della soluzione* (o, anche, *Dipendenza continua delle soluzioni dai dati.*) Si tratta di vedere che, presi due dati Φ_1 e Φ_2 "vicini" nella metrica di Y, allora risulta che due soluzioni u_1 e u_2 corrispondenti a tali dati sono "vicine" nella metrica di X. La stabilità è importante perché quasi mai si ottengono soluzioni esatte, essendo i dati approssimati e le soluzioni calcolate mediante metodi numerici.

- *Algoritmi numerici.* Sono importanti per ottenere una rappresentazione approssimata della soluzione. Lo studio di questi metodi è di pertinenza dell'Analisi Numerica.

Definizione. Un problema si dice *ben posto (secondo Hadamard [4])* se soddisfa i tre requisiti di esistenza, unicità e stabilità.

Un esempio di problema non ben posto è il cosiddetto *problema retrogrado* per l'equazione del calore. Si tratta di determinare la temperatura di un corpo ad un istante $t < 0$ conoscendone la temperatura "finale" all'istante $t = 0$.

Esempio. [Problema retrogrado]

Consideriamo nel rettangolo $(0, 1) \times (-1, 0)$ il problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{se } 0 < x < 1, \quad -1 < t < 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{se } -1 < t < 0 \\ u(x, 0) = e^{-n} \operatorname{sen} n\pi x, \; n \in \mathbb{N} & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, la soluzione $u_n(x, t)$ rappresenta la distribuzione di temperatura nel punto x e al tempo t. Vogliamo determinare $u_n(x, -1)$, cioè quali condizioni nel passato ($t = -1$) abbiano determinato al tempo $t = 0$ la temperatura $e^{-n} \operatorname{sen} n\pi x$. Per quanto già visto anche in precedenza, risolvendo il problema si ottiene

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2 t - n} \operatorname{sen} n\pi x,$$

da cui, ponendo $t = -1$, si ha

$$u_n(x, -1) = e^{n^2\pi^2 - n} \operatorname{sen} n\pi x.$$

D'altra parte, per $n \to +\infty$, $|u_n(x, 0)| \to 0$ mentre $\sup_{x \in (0,1)} |u_n(x, -1)| \to +\infty$ e quindi non si ha "stabilità" della soluzione.

Un altro esempio di problema non ben posto riguarda un problema ai valori iniziali per l'equazione di Laplace ed è dovuto ad Hadamard stesso.

[4] Jacques Hadamard, matematico francese (1865-1963)

Esempio. [di Hadamard]

Consideriamo la distribuzione della temperatura su una piastrina rettangolare $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$ con i lati disposti come gli assi cartesiani. Supponiamo che non vi siano fonti di calore e che sia nota la temperatura lungo l'asse x e la sua variazione ortogonalmente a questo asse. Possiamo supporre che il problema abbia la forma seguente

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x,0) = 0 & \text{se } 0 < x < l_1 \\ u_y(x,0) = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx,\ n \in \mathbb{N} & \text{se } 0 < x < l_1. \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, la soluzione è

$$u_n(x,y) = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^2} \operatorname{sen} nx,$$

da cui, per $n \to +\infty$ si ha $|(u_n)_y(x,0)| \to 0$, ma, fissato $y \in (0, l_2)$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x,y)| \to +\infty$.

Soluzioni radiali dell'equazione di Laplace

Consideriamo in $\mathbb{R}^n$ l'equazione di Laplace

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots u_{x_nx_n} = 0.$$

Tra tutte le possibili soluzioni, cerchiamo le *soluzioni radiali*, cioè quelle che dipendono solo dalla distanza del punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dall'origine. Poniamo perciò $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(r)$, dove $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$.

Si ha

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r},$$

essendo

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}} = \frac{x_i}{r}.$$

Derivando nuovamente

$$u_{x_ix_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \Big(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \Big),$$

da cui si ottiene

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

L'equazione di Laplace si trasforma perciò nella seguente equazione differenziale ordinaria del second'ordine lineare

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0$$

il cui integrale generale è

$$v(r) = c_1 \log r + c_2, \qquad \text{se } n = 2,$$

$$v(r) = \frac{c_1}{r^{n-2}} + c_2, \qquad \text{se } n > 2,$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio.

Determiniamo la soluzione radiale dell'equazione di Laplace nella corona circolare

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

supponendo che la soluzione valga 0 sulla circonferenza di raggio 1 e valga 1 su quella di raggio 2 (problema di Dirichlet).

Siamo nel caso $n = 2$ e quindi $v(r) = \frac{\log r}{\log 2}$. Tornando alle variabili (x, y) la soluzione è dunque

$$u(x, y) = \frac{\log(\sqrt{x^2 + y^2})}{\log 2}.$$

Laplaciano in coordinate polari

Alcuni problemi sono dotati di simmetrie che possono essere di utilità nella ricerca di una soluzione. Per poterle sfruttare è conveniente a volte effettuare un cambiamento di variabili. Ad esempio, nel caso di simmetrie circolari nel piano, possono essere utili le *coordinate polari*

$$x = \rho \cos\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$
$$y = \rho \operatorname{sen}\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

dove la relazione tra i due sistemi di coordinate è la seguente:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

Dalle prime due relazioni, calcolando le derivate parziali, si ha

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\theta \ , \qquad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\theta \ ,$$
$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta \ , \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\cos\theta \ .$$

Sia $u\,(x,y)$ è una funzione di classe C^2 su un aperto U del piano xy e poniamo

$$v(\rho,\theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Per la regola di derivazione della funzione composta si ha

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = u_x\cos\theta + u_y\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

e, derivando nuovamente rispetto a ρ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} = \frac{\partial\, u_x}{\partial \rho}\cos\theta + u_x\frac{\partial\, \cos\theta}{\partial \rho} + \frac{\partial\, u_y}{\partial \rho}\,\mathrm{sen}\,\theta + u_y\frac{\partial\, \mathrm{sen}\,\theta}{\partial \rho}\\ = \frac{\partial\, u_x}{\partial \rho}\cos\theta + \frac{\partial\, u_y}{\partial \rho}\,\mathrm{sen}\,\theta.\end{aligned}$$

poiché gli altri due termini sono zero. Per calcolare il temine $\partial\, u_x/\partial\rho$ osserviamo che la formula di derivazione simbolica,

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}\sin\theta$$

si può applicare non solo a $u(x,y)$ ma anche a $u_x(x,y)$. Di conseguenza otteniamo

$$\frac{\partial u_x}{\partial \rho} = u_{xx}\cos\theta + u_{xy}\sin\theta \ ,$$

e

$$\frac{\partial u_y}{\partial \rho} = u_{yx}\cos\theta + u_{yy}\sin\theta \ .$$

Si ha quindi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} = u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\sin^2\theta,$$

essendo, per il Teorema di Schwarz, $u_{xy} = u_{yx}$ dal momento che abbiamo supposto u di classe C^2. In modo del tutto simile si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= u_{xx}\sin^2\theta - 2u_{xy}\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\cos^2\theta\\ &\quad -\frac{1}{\rho}u_x\cos\theta - \frac{1}{\rho}u_y\sin\theta \ ,\end{aligned}$$

e poiché
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} u_x \cos\theta + \frac{1}{\rho} u_y \sin\theta \ ,$$
si ha
$$\Delta u(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} = v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho} v_\rho.$$
avendo omesso per brevità le dipendenze esplicite dalle variabili.

Abbiamo così ottenuto l'espressione del Laplaciano in coordinate polari. Se v non dipende da θ (cioè cerchiamo soluzioni u radiali), allora $v_{\theta\theta} = 0$ e il Laplaciano assume la forma più semplice
$$\Delta u(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho,$$
già trovata in precedenza.

10^a **settimana - 28-29.11.19**

Un risultato utile per il problema di Dirichlet in un cerchio è il seguente

Teorema. *Sia* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua e* 2π*-periodica e sia* $\Omega = \{(\rho, \theta) : \rho^2 < r^2\}$. *Allora il problema*

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho} u_\rho = 0 & \textit{in } \Omega \\ u(r, \theta) = \varphi(\theta) \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione $u(\rho, \theta)$ *di classe* $C^2(\Omega)$ *e continua in* $\bar{\Omega}$.

In $\mathbb{R}^n$, per insiemi Ω più generali si ha il seguente risultato

Teorema. *Sia* Ω *un aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$ *per il quale valga il teorema della divergenza. Allora il problema di Dirichlet omogeneo*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla, mentre il problema di Neumann omogeneo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ammette come soluzioni tutte le costanti. Inoltre, il problema di Dirichlet non omogeneo ammette al più una soluzione in $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, *mentre il problema di Neumann non omogeneo, se ammette soluzione in* $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, *essa non sarà unica, ma sarà determinata a meno di una costante additiva arbitraria.*

Osservazione. Nel caso del problema di Neumann non omogeneo

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \psi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

se i dati f e ψ sono arbitrari, la soluzione in generale non esiste. Infatti *condizione necessaria affinché esista soluzione è che*

$$\int_\Omega f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\partial\Omega} \psi(x_1, \ldots, x_n)\, d\sigma.$$

Per provarlo, se u è una soluzione del problema, integrando e usando il Teorema della Divergenza, si ha (ponendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$)

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, dx = \int_\Omega \operatorname{div} \nabla u(x)\, dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} < \nabla u(x), n > \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma.$$

Diamo ora un risultato di unicità per i problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann per l'equazione di diffusione.

Teorema. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ per il quale valga il teorema della divergenza e sia $\bar{t} > 0$. Allora i problemi di Cauchy-Dirichlet (come sopra ponendo $x = (x_1, \dots, x_n)$)*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \quad 0 < t < \bar{t}, \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < \bar{t}, \end{cases}$$

e Cauchy-Neumann

$$\begin{cases} u_t - \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \quad 0 < t < \bar{t}, \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < \bar{t}, \end{cases}$$

omogenei ammettono solo la soluzione nulla. I corrispondenti problemi non omogenei ammettono, nel cilindro $\Omega \times (0, \bar{t})$, al più una sola soluzione $u(x_1, \dots, x_n, t)$, di classe C^2 in Ω e C^1 in $(0, \bar{t})$ continua per $t = 0$ e C^1 su $\partial\Omega \times (0, \bar{t})$.

Ad esempio nel caso di Cauchy-Dirichlet abbiamo trovato una soluzione col metodo della separazione delle variabili.

Nel caso dell'equazione delle onde la situazione in generale è più complicata. Ci limitiamo a mostrare un altro metodo, diverso da quello già visto della separazione delle variabili, per risolvere l'equazione della corda vibrante con estremi fissi.

Risoluzione dell'equazione della corda vibrante con estremi fissi mediante il metodo di riflessione

Consideriamo nuovamente l'equazione della corda vibrante con estremi fissi. Vogliamo risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} = \sigma^2 u_{xx} & \text{se } 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{se } 0 < x < L \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{se } 0 < x < L \end{cases}$$

con un metodo diverso da quello della separazione delle variabili usato in precedenza.

Ricordiamo la seguente osservazione (vedi Esempio 3 fatto in precedenza)

Osservazione. Determiniamo l'integrale generale dell'equazione del second'ordine lineare

$$u_{xy} = 0.$$

Poiché la derivata di u_x rispetto a y è uguale a 0, ne segue che $u_x = \Phi(x)$. Integrando u_x rispetto a x si ottiene

$$u(x, y) = \int \Phi(x)dx + \psi(y).$$

Perciò l'integrale generale dell'equazione è dato da

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

dove $\varphi(x)$ è una qualunque primitiva di $\Phi(x)$. $\square$

Come già visto, l'equazione della corda vibrante che vogliamo studiare è la seguente:

$$u_{tt} - \sigma^2 u_{xx} = 0.$$

Operando il cambiamento di variabile

$$x + \sigma t = \xi, \quad x - \sigma t = \eta,$$

e ponendo $u(x, t) = \omega(\xi, \eta)$, l'equazione data diventa

$$4\sigma^2 \omega_{\xi\eta} = 0,$$

il cui integrale generale, per quanto appena visto, è

$$\omega(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

Tornando alle variabili x e t si ottiene l'integrale generale

$$u(x, t) = \varphi(x + \sigma t) + \psi(x - \sigma t).$$

Come si vede da queste formule, contrariamente alle equazioni differenziali ordinarie, nelle EDP l'integrale generale contiene funzioni (e non costanti) arbitrarie e quindi, anche se si riesce a trovarlo (come nei due casi descritti sopra), risulta poi difficile nei casi concreti determinare queste funzioni attraverso le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

Supponiamo preliminarmente che la corda sia infinitamente lunga, cioè supponiamo $x \in \mathbb{R}$ invece che $x \in (0, L)$. Imponendo le condizioni iniziali del problema di Cauchy, cioè $u(x, 0) = u_0(x)$ e $u_t(x, 0) = v_0(x)$, si ottiene

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = u_0(x), \\ \sigma\varphi'(x) - \psi'(x) = v_0(x). \end{cases}$$

Derivando la prima equazione, moltiplicandola per σ e sommandola alla seconda si ha

$$2\sigma\varphi'(x) = \sigma u_0'(x) + v_0(x).$$

Integrando, e chiamando ξ la variabile di φ, si ha

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2}u_0(\xi) + \frac{1}{2\sigma}\int_0^{\xi} v_0(\tau)d\tau + c$$

e quindi, chiamando η l'argomento di ψ, si ottiene

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2}u_0(\eta) - \frac{1}{2\sigma}\int_0^{\eta} v_0(\tau)d\tau - c.$$

Perciò, la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(x,t) = \varphi(x+\sigma t) + \psi(x-\sigma t) = \frac{1}{2}\big(u_0(x+\sigma t) + u_0(x-\sigma t)\big) + \frac{1}{2\sigma}\int_{x-\sigma t}^{x+\sigma t} v_0(\tau)d\tau,$$

che è detta *formula di d'Alembert*. Una condizione di immediata verifica affinché essa sia soluzione del problema con la corda infinita è espresso dal seguente

Teorema. *Supponiamo* $u_0 \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ *e* $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$. *Allora la funzione* u *data dalla formula di d'Alembert è di classe* C^2 *ed è soluzione del problema*

$$\begin{cases} u_{tt} = \sigma^2 u_{xx} & \textit{se } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \textit{se } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \textit{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Osserviamo che la soluzione u nel punto (x,t) dipende solo dai valori che i dati iniziali assumono nelll'intervallo $[x-\sigma t, x+\sigma t]$. Una variazione dei dati nel punto $\bar{x} > x$ comincerà a farsi sentire in x al partire dal tempo $\bar{t} = (\bar{x} - x)/\sigma$.

Torniamo ora al problema della corda con estremi fissi. La soluzione che cerchiamo avrà come dominio la striscia

$$S = \{(x,t) : 0 \le x \le L,\, t \ge 0\}.$$

Nella regione triangolare

$$T = \{(x,t) : t \le x/\sigma,\, t \le (L-x)/\sigma,\, t \ge 0\}.$$

la soluzione è rappresentata dalla formula di d'Alembert, essendo univocamente determinata dai dati iniziali u_0 e v_0 ed essendo indipendente dalle condizioni al contorno. Per avere la soluzione nei punti di S non appartenenti a T cominciamo col prolungare u_0 e v_0 a $[-L, L]$ come funzioni dispari e poi prolunghiamole per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ come funzioni $2L$-periodiche (e dispari). Siano $\tilde{u}_0$ e $\tilde{v}_0$ i prolungamenti così ottenuti. Proviamo che la funzione ottenuta dalla formula di d'Alembert, ristretta a S, soddisfa le condizioni al contorno. Si ha infatti

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\big(\tilde{u}_0(\sigma t) + \tilde{u}_0(-\sigma t)\big) + \frac{1}{2\sigma}\int_{-\sigma t}^{+\sigma t} \tilde{v}_0(\tau)d\tau = 0, \quad \forall t,$$

e anche

$$u(L,t) = \frac{1}{2}\big(\tilde{u}_0(L+\sigma t) + \tilde{u}_0(L-\sigma t)\big) + \frac{1}{2\sigma}\int_{L-\sigma t}^{L+\sigma t} \tilde{v}_0(\tau)d\tau = 0, \quad \forall t,$$

essendo $\tilde{u}_0$ e $\tilde{v}_0$ dispari.

Le condizioni al contorno e quelle iniziali sono perciò soddisfatte. Rimane da verificare l'equazione differenziale. Per il teorema sulla corda di lunghezza infinita, la funzione u data dalla formula di d'Alembert è soluzione se $\tilde{u}_0 \in C^2$ e $\tilde{v}_0 \in C^1$. Condizioni su u_0 e v_0 che garantiscono che questo accada sono date dal seguente

Teorema *Siano u_0 e v_0 definite in $[0, L]$ e tali che*

- $u_0 \in C^2([0, L]), \quad u_0(0) = u_0(L) = 0, \quad u''(0) = u''(L) = 0;$
- $v_0 \in C^1([0, L]), \quad v_0(0) = v_0(L) = 0.$

Allora, la restrizione alla striscia $S = \{(x, t) : 0 \le x \le L,\ t \ge 0\}$ (oppure anche $t \le 0$) della funzione u data dalla formula di d'Alembert è (l'unica) soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = \sigma^2 u_{xx} & se\ 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & se\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & se\ 0 < x < L \\ u_t(x,0) = v_0(x) & se\ 0 < x < L \end{cases}$$

11^a **settimana - 5-6.12.19**

Trasformata di Fourier

per questa parte vedere

Mugelli F. – Spadini M., *Metodi matematici*,

oppure

Nakhlé H. Asmar, *Partial Differential Equations, with Fourier Series and Boundary Value Problems*

12^a **settimana - 12-13.12.19**

Trasformata di Laplace

per questa parte vedere

Mugelli F. – Spadini M., *Metodi matematici*,

oppure

Nakhlé H. Asmar, *Partial Differential Equations, with Fourier Series and Boundary Value Problems*

13^a **settimana - 19.12.19**

Trasformata inversa di Laplace

per questa parte vedere

Mugelli F. – Spadini M., *Metodi matematici*,

oppure

Nakhlé H. Asmar, *Partial Differential Equations, with Fourier Series and Boundary Value Problems*