

DOTTORATO DI RICERCA IN MATEMATICA
CONSORZIO DELLE UNIVERSITÀ DI FIRENZE, CAGLIARI, MODENA, PERUGIA E SIENA

Francesco Mugelli

**Disuguaglianze di Sobolev nello spazio iperbolico
bidimensionale**

Tesi di Dottorato in Matematica
(X ciclo: 1994-1998)

Direttore della Ricerca
Prof. Giorgio Talenti

Coordinatore del Dottorato
Prof. Paolo Marcellini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

Introduzione

Le disuguaglianze di Sobolev permettono di maggiorare la norma L^p di funzioni mediante la norma delle sue derivate parziali; citiamo ad esempio, [Zie89], la disuguaglianza di Sobolev classica per funzioni in $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_q \leq C(n,p) \|\nabla u\|_p \quad (0.1)$$

dove $q = np/(n-p)$, $1 \leq p < n$ ed Ω è un sottoinsieme aperto dello spazio euclideo n -dimensionale e C è una costante che non dipende da u .

Ricordiamo i legami fra le disuguaglianze di Sobolev e la struttura geometrica della varietà su cui sono costruiti gli spazi funzionali: per $p = 1$, la disuguaglianza (0.1) è equivalente al teorema isoperimetrico di \mathbb{R}^n , ed è comunque strettamente legata ad esso per $1 < p < n$.

Oggetto di questa tesi sono alcune disuguaglianze di Sobolev su \mathbb{R}_+^2 dotato della metrica di *Poincaré-Bergman*

$$y^{-2} [(dx)^2 + (dy)^2]$$

— che denoteremo con \mathbb{H}^2 — e che costituisce un possibile modello per lo spazio iperbolico bidimensionale.

L'argomento trattato prende spunto da un lavoro, [Fra92], di L.E. Fraenkel riguardante la meccanica dei fluidi; in esso è dimostrata la validità, per $2 \leq q < \infty$ della disuguaglianza

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |\varphi|^q y^{-q/2-2} dx dy \right\}^{1/q} \leq A \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) y^{-1} \right\}^{1/2}, \quad (0.2)$$

dove φ è una funzione a valori reali, regolare, definita su \mathbb{R}_+^2 che tenda a zero abbastanza velocemente al tendere di y a zero o al tendere di $x^2 + y^2$ all'infinito.

Fraenkel stesso ha ricollegato un caso particolare della (0.2) — per $q = 10/3$ — ad una disuguaglianza di Sobolev per lo spazio euclideo \mathbb{R}^5 ed ha stabilito il valore ottimale della costante A per questo caso e per $p = 2$ (nel quale la (0.2) è riconducibile alla disuguaglianza di Hardy. Ha inoltre osservato che in tali casi l'uguaglianza nella (0.2) è effettivamente raggiunta.

Mediante il cambio di variabile $\varphi(x,y) = \sqrt{y} \cdot u(x,y)$ la (0.2) assume la forma

$$A^{-2} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/q} \leq \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{3}{4} \int_{\mathbb{R}_+^2} u^2 \frac{dx dy}{y^2}, \quad (0.3)$$

che, come viene mostrato nel capitolo 2, è interpretabile come un caso limite della disuguaglianza di Sobolev in \mathbb{H}^2 (si vedano le formule (3.2)).

Nel primo capitolo sono discusse le disuguaglianze di Sobolev in \mathbb{H}^2 nei casi non critici, vale a dire per $p \neq 2$.

Il capitolo consta in due teoremi: nel primo sono dimostrate alcune disuguaglianze di Sobolev in \mathbb{H}^2 per esponenti non critici mentre il secondo è strumentale al primo.

La dimostrazione del teorema 1.1 fa uso della teoria dei *riordinamenti* e si basa sulla trasformazione delle disuguaglianze (1.1)-(1.5) in problemi variazionali unidimensionali. È qui che entra in gioco la struttura geometrica del semipiano iperbolico visto come varietà riemanniana: perché il riordinamento abbia le proprietà necessarie — in particolare che gli integrali del tipo di Dirichlet decrescano, cfr. teorema 1.2 — esso deve essere modellato sui *cerchi geodetici* di \mathbb{H}^2 ; questi ultimi coinvolgono le nozioni di *lunghezza*, *area* e *perimetro* riemanniani e l'uso delle *coordinate polari geodetiche*.

La disuguaglianza isoperimetrica in \mathbb{H}^2 , che dipende dalla *curvatura* (cfr. [Oss78]), insieme alla formula della coarea di Federer [Zie89] sono gli strumenti principali utilizzati per la dimostrazione del teorema 1.2.

Il secondo capitolo tratta di un caso limite delle disuguaglianze di Sobolev per \mathbb{H}^2 :

$$C(2, q, R) \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q y^{-2} dx dy \right\}^{2/q} \leq \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy - R \int_{\mathbb{R}_+^2} u^2 y^{-2} dx dy. \quad (0.4)$$

In particolare è studiata l'esistenza di un valore massimo per la costante $C(2, q, R)$ per $2 < q < \infty$ e $-\infty < R < 1/4$. Si osservi che per $R = -3/4$ la (0.4) coincide con la (0.3) e che $C(2, q, R) = A^{-2}$. Il teorema 2.1, nella cui dimostrazione sono utilizzate le stesse tecniche descritte per i teoremi del capitolo precedente, mostra che il problema può essere ricondotto allo studio dell'esistenza e della unicità delle soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d}{ds}(s(s + 4\pi)v'(s)) + Rv(s) + |v(s)|^{q-2} \cdot v(s) = 0 \quad (0.5)$$

che soddisfano le condizioni

$$-4\pi v'(0) = Rv(0) + |v(0)|^{q-2} \cdot v(0), \quad v(\infty) = 0; \quad (0.6)$$

il medesimo teorema fornisce una formula per la costante $C(2, q, R)$.

Per $R = 0$ e $q = 3$ o $q = 4$ è possibile scrivere in forma chiusa la soluzione del problema ai limiti (0.5)-(0.6), conseguentemente è possibile determinare esplicitamente i valori di $C(2, 3, 0)$ e di $C(2, 4, 0)$ e ciò è l'oggetto del teorema 2.2.

Nel terzo capitolo è descritto un algoritmo per il calcolo numerico della costante $C(2, q, R)$. Il problema ai limiti (0.5)-(0.6) è trasformato in uno equivalente mediante un cambio di variabile, ed è quest'ultimo ad essere risolto numericamente utilizzando uno schema alle differenze finite basato sulla formula di quadratura del *midpoint*. Nella tabella riportata alla fine del paragrafo 3.6 compaiono alcuni dei valori ottenuti per $C(2, q, R)$. L'accuratezza dei risultati ottenuti può essere valutata in base alle considerazioni alla fine del paragrafo 3.4 sul cosiddetto *errore globale di troncamento*. Il calcolo esplicito di quest'ultimo è possibile solo per $C(2, 3, 0)$, $C(2, 4, 0)$ e per $C(2, 10/3, -3/4)$, e i dati confermano le valutazioni generali. Sono infine riportati i grafici della soluzione del problema (0.5)-(0.6) in alcuni casi particolari.

I risultati presentati nel capitolo 1 sono pubblicati in un lavoro, [MT97], scritto in collaborazione con il prof. Giorgio Talenti, così come il contenuto del capitolo 2 pubblicato in [MT]. I risultati numerici potrebbero essere oggetto di miglioramenti futuri utilizzando ad esempio schemi alle differenze di ordine superiore al secondo o griglie di punti non uniformi e scelte in base all'andamento qualitativo della soluzione.

Capitolo 1

Il caso $p \neq 2$

1.1 Risultati principali

Teorema 1.1 Sia $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty\}$, il semipiano euclideo, sia u una funzione a valori reali definita in \mathbb{R}_+^2 . Supponiamo u regolare a sufficienza (ad esempio lipschitziana) e che tenda a zero abbastanza velocemente (per esempio a supporto limitato e a distanza positiva dall'asse X). Allora valgono le disuguaglianze seguenti e sono ottimali.

$$(i) \quad \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u| \frac{dx dy}{y^2} \right\}^2 + 4\pi \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^2 \frac{dx dy}{y^2} \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} y \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \frac{dx dy}{y^2} \right\}^2. \quad (1.1)$$

(ii) Se $1 < p < 2$ e $q = 2p/(2-p)$ allora

$$p^{-2} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^p \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/p} + \frac{(4\pi/q)^2 (q/2 - 1)^{2/q}}{\sin(2\pi/q)} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/q} \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} y^p (u_x^2 + u_y^2)^{p/2} \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/p}. \quad (1.2)$$

(iii) Se $p > 2$ allora

$$\sup |u| \leq (4\pi)^{-1/p} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{p-2}{2(p-1)}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2(p-1)}\right)} \right\}^{1-1/p} \times \quad (1.3)$$

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} y^p (u_x^2 + u_y^2)^{p/2} \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{1/p}. \quad (1.4)$$

(iv) Se $1 \leq p < \infty$ allora

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/p} \leq p^p \int_{\mathbb{R}_+^2} y^p (u_x^2 + u_y^2)^{p/2} \frac{dx dy}{y^2}. \quad (1.5)$$

Il teorema 1.1 può essere interpretato nella maniera seguente. La forma quadratica

$$y^{-2} [(dx)^2 + (dy)^2], \quad (1.6)$$

detta anche *metrica di Poincaré-Bergman*, rende \mathbb{R}_+^2 una varietà riemanniana, che d'ora in poi denoteremo con \mathbb{H}^2 . \mathbb{H}^2 può essere preso a modello di piano iperbolico bidimensionale e gode di varie proprietà che esamineremo fra breve. (Si vedano ad esempio [Bia27] capitolo 14, [Bla30] paragrafi 74 e 75, [SG70] paragrafo 9.5 e [Sie71] paragrafo 2.2.)

Per ulteriori proprietà geometriche di \mathbb{H}^2 si rimanda al paragrafo 2.1.

Le applicazioni differenziabili da \mathbb{H}^2 in \mathbb{H}^2 rispetto a cui la metrica Riemanniana sia invariante sono date sia dalle funzioni razionali del primo ordine in una variabile complessa $x + iy$ — dette trasformazioni di Möbius — a coefficienti reali, sia dalla coniugata di tali funzioni.

L'*angolo* riemanniano tra due vettori tangenti a \mathbb{H}^2 coincide con l'angolo euclideo; la *lunghezza* riemanniana di un vettore tangente a \mathbb{H}^2 in un punto (x, y) è pari a $y \times$ (lunghezza euclidea). Le *geodetiche* di \mathbb{H}^2 sono le semirette e le semi-circonferenze ortogonali all'asse x ; la *distanza* riemanniana tra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è

$$\log \left[\frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2} - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right]. \quad (1.7)$$

La *misura* riemanniana *bi-dimensionale* su \mathbb{H}^2 , \mathcal{M} , è data da

$$d\mathcal{M} = y^{-2} dx dy. \quad (1.8)$$

L'*operatore di Laplace-Beltrami* su \mathbb{H}^2 è $\Delta = y^2 ((\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2)$; la *curvatura* di \mathbb{H}^2 è identicamente -1 .

Le disuguaglianze (1.1)-(1.5) sono strettamente collegate alla struttura riemanniana di \mathbb{H}^2 . Se immaginiamo u come un campo scalare su \mathbb{H}^2 si ha

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{1/q} = \left\{ \int_{\mathbb{H}^2} |u|^q d\mathcal{M} \right\}^{1/q} \quad (1.9)$$

come *norma di u nello spazio di Lebesgue $L^q(\mathbb{H}^2)$* . D'altra parte, la derivata covariante di u , ∇u , è il campo vettoriale tangente ad \mathbb{H}^2 le cui componenti sono u_x e u_y e la cui lunghezza riemanniana $|\nabla u|$, è uguale a $y \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Di conseguenza

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} y^p (u_x^2 + u_y^2)^{p/2} \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{1/p} = \left\{ \int_{\mathbb{H}^2} |\nabla u|^p d\mathcal{M} \right\}^{1/p}, \quad (1.10)$$

è la *norma di ∇u in $L^p(\mathbb{H}^2) \times L^p(\mathbb{H}^2)$* .

Gli enunciati (i), (ii) e (iii) del teorema 1.1 sono allora le *disuguaglianze di Sobolev* nello spazio iperbolico \mathbb{H}^2 ; l'enunciato (iv) è una disuguaglianza *à la Poincaré* in \mathbb{H}^2 . Disuguaglianze di questo tipo sono già note. Le costanti che compaiono nel teorema 1.1 sono però le *migliori possibili*. (Una bibliografia standard su Spazi e disuguaglianze di Sobolev si può trovare su [Ada75],[Maz85], [Zie89]. Disuguaglianze di Sobolev nello spazio euclideo n -dimensionale si possono trovare in [Tal94], paragrafo 2. Forme ottimali di disuguaglianze di Sobolev sulla sfera sono apparse in [Tal87] e in [Cia89].

Spazi di sobolev e disuguaglianze su varietà riemanniane sono discussi in [Aub76b], [Aub76a] e [Aub82].)

(i) La dimostrazione del teorema 1.1 si basa sul *teorema isoperimetrico* per lo spazio iperbolico \mathbb{H}^2 , sebbene un metodo alternativo presentato nel paragrafo 2 può funzionare ugualmente. Vorremo sottolineare che, viceversa, il teorema isoperimetrico per \mathbb{H}^2 possa essere ricavato a partire dalla disuguaglianza (1.1) — tale procedimento è molto simile a quelli utilizzati ad esempio in [Tal94], teorema 2A oppure in [Zie89], paragrafo 2.7. In altri termini, l'enunciato (i) del teorema 1.1 è equivalente al teorema isoperimetrico per \mathbb{H}^2 .

(ii) La costante principale che figura nella disuguaglianza (1.2) coincide (a meno di una potenza opportuna) con la *costante di Sobolev* per il *piano euclideo*, coerentemente con i risultati di Aubin ([Aub76b],[Aub76a]).

(iii) La disuguaglianza (1.5) è peculiare dello spazio iperbolico \mathbb{H}^2 . Inoltre implica che

$$\int_{\mathbb{H}^2} u^2 d\mathcal{M} \leq 4 \int_{\mathbb{H}^2} u(-\Delta u) d\mathcal{M} \quad (1.11)$$

per ogni funzione test u — una disuguaglianza già osservata da McKean [McK70] che mostra una situazione simile per \mathbb{H}^2 : lo spettro di $\Delta : L^2(\mathbb{H}^2) \mapsto L^2(\mathbb{H}^2)$ si trova a sinistra di $-1/4$. Come si può osservare dalla dimostrazione, questa proprietà è collegata alla *curvatura negativa* di \mathbb{H}^2 .

Questo lavoro ha preso spunto da un articolo di L.E.Fraenkel [Fra92], nel quale, per dimostrare l'esistenza per le soluzioni di una equazione differenziale in meccanica dei fluidi, fornisce una dimostrazione che (secondo le nostre notazioni) se $q \geq 2$ allora esiste una costante A tale che

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |\varphi|^q y^{-q/2-2} dx dy \right\}^{1/q} \leq A \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \frac{dx dy}{y} \right\}^{1/2} \quad (1.12)$$

per ogni funzione reale regolare a supporto compatto φ definita in \mathbb{R}_+^2 . Fraenkel si preoccupò di determinare la più piccola costante A per cui vale la disuguaglianza scritta sopra e riuscì a dimostrare nel caso in cui $q = 10/3$ il valore della costante è $2^{6/5} \cdot 15^{-1/2} \cdot \pi^{-1/5}$.

Il cambio di variabile $\varphi(x, y) = \sqrt{y} u(x, y)$ e una integrazione per parti trasformano la disuguaglianza in

$$\left\{ \int_{\mathbb{H}^2} |u|^q d\mathcal{M} \right\}^{1/q} \leq A \left\{ \int_{\mathbb{H}^2} |\nabla u|^2 d\mathcal{M} + \frac{3}{4} \int_{\mathbb{H}^2} |u|^2 d\mathcal{M} \right\}^{1/2}. \quad (1.13)$$

La disuguaglianza di Fraenkel può essere quindi interpretata come un *caso limite* — cioè un caso in cui l'esponente principale è uguale alla dimensione — di una disuguaglianza di Sobolev nello spazio iperbolico \mathbb{H}^2 . Una tale situazione può essere affrontata usando i metodi di questo lavoro anche se non è contemplata nel teorema 1.1. Sarà oggetto di discussione nel capitolo successivo.

1.2 Riordinamenti

Sia u una funzione a valori reali definita sullo spazio iperbolico \mathbb{H}^2 tale che la misura riemanniana degli insiemi di livello $\{(x, y) \in \mathbb{H}^2 : |u(x, y)| > t\}$ sia finita per ogni valore positivo di t .

Le definizioni seguenti sono simili a quelle introdotte da Hardy e Littlewood e rielaborate da vari autori (si vedano [HLP] Capitolo 10, [PS51] Capitoli 1 e 2, [Ban80] Capitolo 2, [Kaw85] Capitolo 2, [Bae94], [Tal94], ed i riferimenti in essi citate).

La *funzione distribuzione* di u , μ , è la misura riemanniana degli insiemi di livello della u , ovvero è definita da

$$\mu(t) = \int_{\{(x,y) \in \mathbb{H}^2 : |u(x,y)| > t\}} d\mathcal{M} \quad (1.14)$$

per ogni valore di t non negativo. Il *riordinamento decrescente* di u , u^* , è definito da

$$u^*(s) = \inf \{t \geq 0 : \mu(t) \leq s\} \quad (1.15)$$

per ogni s non negativo. Il *riordinamento simmetrico* di u , u^\star , è definito da

$$u^\star(x, y) = u^* \left(\frac{\pi}{y} (x^2 + (y-1)^2) \right) \quad (1.16)$$

per ogni (x, y) in \mathbb{H}^2 .

Chiaramente, μ è *non negativa, decrescente e continua a destra*, e u^* coincide con la funzione distribuzione di μ . Si dimostra facilmente che

$$\{s \geq 0 : u^*(s) > t\} = [0, \mu(t)[\quad (1.17)$$

per ogni t non negativo — vale a dire *l'insieme in cui u^* supera t è un intervallo dell'asse reale i cui estremi sono 0 e il valore di μ in t* .

Ricordiamo che il *cerchio geodetico* in \mathbb{H}^2 con centro in (a, b) e raggio r coincide con il cerchio euclideo di centro $(a, b \cosh r)$ e raggio $b \sinh r$; e che area e perimetro riemanniani di un cerchio geodetico in \mathbb{H}^2 di raggio r sono $4\pi[\sinh(r/2)]^2$ e $2\pi \sinh r$ rispettivamente. In altri termini, se a, b ed s sono parametri reali, e b ed s sono positivi, la disuguaglianza $(x-a)^2 + (y-b)^2 < (s/\pi)by$ definisce il cerchio geodetico in \mathbb{H}^2 tale che: centro = (a, b) , misura = s , perimetro = $\sqrt{s^2 + 4\pi s}$ e raggio = $\log \left(1 + \frac{1}{2\pi}s + \frac{1}{2\pi}\sqrt{s^2 + 4\pi s} \right)$. L'equazione (1.16) implica allora che il valore di u^\star in un qualsiasi punto (x, y) dipende soltanto dalla distanza riemanniana tra (x, y) e $(0, 1)$ e decresce al crescere della distanza. Le equazioni (1.16) e (1.17) ci dicono quindi che

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 : |u^\star(x, y)| > t\} &= \text{cerchio geodetico aperto} \\ &\text{il cui centro è } (0, 1) \text{ e la cui misura riemanniana è pari a } \mu(t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

per ogni t non negativo.

Le equazioni (1.17) e (1.18) ci dicono inoltre che u, u^*, u^\star sono *equidistribuite*, cioè la funzione distribuzione di u^* e la funzione distribuzione di u^\star coincidono entrambe con μ , funzione distribuzione di u . Segue allora che

$$\text{ess sup } |u| = u^*(0) = u^\star(0, 0), \quad (1.19)$$

e

$$\int_{\mathbb{H}^2} \Phi(|u(x, y)|) d\mathcal{M} = \int_0^\infty \Phi(u^*(s)) ds = \int_{\mathbb{H}^2} \Phi(|u^\star(x, y)|) d\mathcal{M} \quad (1.20)$$

se Φ è una funzione crescente positiva definita in $[0, \infty[$ tale che $\Phi(0) = 0$.

Come mostrato nel paragrafo 1.4, una dimostrazione del teorema 1.1 si basa sulle equazioni (1.19) e (1.20) e sul teorema seguente.

Teorema 1.2 *Sia u una funzione a valori reali definita sullo spazio iperbolico \mathbb{H}^2 . Supponiamo che u sia lipschitziana e che la misura riemanniana di $\{(x, y) \in \mathbb{H}^2 : |u(x, y)| > t\}$ sia finita per ogni t positivo.*

Sia Φ una funzione di Young — supponiamo cioè che Φ mandi $[0, \infty[$ in $[0, \infty[$, che $\Phi(0) = 0$, e che Φ sia crescente e convessa. Allora

$$\int_{\mathbb{H}^2} \Phi(|\nabla u|) d\mathcal{M} \geq \int_0^\infty \Phi\left(-\sqrt{4\pi s + s^2} \frac{du^*}{ds}(s)\right) ds, \quad (1.21)$$

e

$$\text{secondo membro della (1.21)} = \int_{\mathbb{H}^2} \Phi(|\nabla u^\star|) d\mathcal{M}. \quad (1.22)$$

Il teorema 1.2 equivale a dire che gli integrali del tipo di Dirichlet decrescono sotto un riordinamento simmetrico. (Un equivalente di ciò, in cui \mathbb{H}^2 è rimpiazzato dallo spazio euclideo, è uno strumento ben noto, discusso esaurientemente in [BZ88a], ad esempio). Curiosamente, il teorema 1.2 può essere ricavato anche da disuguaglianze sui riordinamenti che si basano su argomenti *puramente combinatori*. Una dimostrazione che segue questa traccia è dovuta a A. Baernstein e W. Beckner [Bae94], paragrafi 1.3 e 1.4. Qui insisteremo più su un approccio geometrico e daremo una dimostrazione che si basa sul teorema isoperimetrico per \mathbb{H}^2 e che possa aiutare a comprendere per quale motivo entri in gioco la curvatura negativa di \mathbb{H}^2 .

Il *teorema isoperimetrico* per lo spazio iperbolico \mathbb{H}^2 è il seguente. Sia E un sottoinsieme sufficientemente regolare di \mathbb{H}^2 , e siano

$$P = \int_{\partial E} \frac{1}{y} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad \text{e} \quad A = \int_E \frac{dx dy}{y^2}$$

— il perimetro riemanniano e l'area riemanniana di E , rispettivamente. Se A è finita, allora

$$P \geq \sqrt{4\pi A + A^2}; \quad (1.23)$$

inoltre, P è uguale a $\sqrt{4\pi A + A^2}$ se e solo se E è un cerchio. Una prima dimostrazione di questo teorema è dovuta a E. Schmidt [Sch40], un'altra si trova in [BZ88b], paragrafo 10.

La curvatura entra in gioco nel teorema isoperimetrico per \mathbb{H}^2 . Infatti, come osservato in [Oss78], paragrafo 4, la disuguaglianza isoperimetrica su una varietà bi-dimensionale *a curvatura costante* — sia essa una sfera, il piano euclideo, o il piano iperbolico — si scrive

$$(\text{perimetro}) \geq [4\pi \times (\text{area}) - (\text{curvatura}) \times (\text{area})^2]^{1/2}. \quad (1.24)$$

La dimostrazione data nel seguito di questo paragrafo e nel successivo indica che: (i) I pesi

$$\sqrt{C_1 s + C_2 s^2},$$

$$C_1 = 4\pi \quad \text{e} \quad C_2 = -(\text{curvatura}),$$

compaiono nella disuguaglianza del teorema 1.2 proprio a causa del teorema isoperimetrico. (ii) È sempre questo peso, che si comporta come \sqrt{s} quando s è piccolo e come s quando s è grande, a fare sí che la disuguaglianza nel teorema 1.1 valga nella forma enunciata.

Dimostrazione del teorema 1.2 Chiaramente, non si perde in generalità nel supporre $u \geq 0$. Dalla formula della coarea di Federer segue che

$$\int_{u^{-1}(\{u^*(s+h), u^*(s)\})} y \sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{u^*(s+h)}^{u^*(s)} dt \int_{u^{-1}(\{t\})} \frac{1}{y} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (1.25)$$

se $s \geq 0$ e $h \geq 0$. (Una versione piÙ accessibile della formula della coarea di Federer si trova ad esempio in [Zie89], Section 2.7). Il teorema isoperimetrico nello spazio iperbolico \mathbb{H}^2 implica che

$$\int_{u^{-1}(\{t\})} \frac{1}{y} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \geq \sqrt{4\pi\mu(t) + [\mu(t)]^2} \quad (1.26)$$

per ogni t non negativo. Infatti, se $s \geq 0$ e $h \geq 0$ si ha

$$\int_{u^{-1}([u^*(s+h), u^*(s)])} |\nabla u| d\mathcal{M} \geq \sqrt{4\pi s + s^2} [u^*(s) - u^*(s+h)]. \quad (1.27)$$

La disuguaglianza (1.27) è fondamentale: su di essa si basa tutto il teorema 1.2.

Prima di tutto mostriamo che u^* è localmente lipschitziana — una proprietà contenuta implicitamente nell'enunciato del teorema 1.2. Proprietà fondamentali della funzione distribuzione e dei riordinamenti decrescenti (equazioni (1.14), (1.15) e (1.17)) implicano che

$$\int_{u^{-1}([u^*(s+h), u^*(s)])} d\mathcal{M} \leq h \quad (1.28)$$

se $s \geq 0$ e $h \geq 0$. Inoltre,

$$\int_{u^{-1}(\{t\})} |\nabla u| d\mathcal{M} = 0 \quad (1.29)$$

per ogni t non negativo, dato che $u^{-1}(\{t\})$ ha misura riemanniana zero oppure $|\nabla u|$ si annulla quasi ovunque su $u^{-1}(\{t\})$. Le disuguaglianze (1.27) e (1.28), e la equazione (1.29) implicano che

$$\sqrt{4\pi s + s^2} [u^*(s) - u^*(s+h)] \leq h \cdot \text{ess sup } |\nabla u| \quad (1.30)$$

se $s \geq 0$ e $h \geq 0$. Segua la proprietà menzionata sopra. Dalla disuguaglianza (1.27) segue immediatamente che

$$\frac{d}{ds} \int_{\{(x,y) \in \mathbb{H}^2 : u(x,y) > u^*(s)\}} |\nabla u| d\mathcal{M} \geq \sqrt{4\pi s + s^2} \left[-\frac{du^*}{ds}(s) \right] \quad (1.31)$$

per ogni s positivo. Dimostriamo ora che

$$\frac{d}{ds} \int_{\{(x,y) \in \mathbb{H}^2 : u(x,y) > u^*(s)\}} \Phi(|\nabla u|) d\mathcal{M} \geq \Phi \left(\sqrt{4\pi s + s^2} \left[-\frac{du^*}{ds}(s) \right] \right) \quad (1.32)$$

per quasi tutti gli s positivi. Ci sono esattamente tre possibilità: (i) s appartiene a qualche insieme eccezionale avente misura di Lebesgue zero; (ii) du^*/ds si annulla in s ; (iii) esiste un intorno di s in cui u^* è strettamente decrescente.

Se vale la (i) o la (ii) non c'è niente da dimostrare. Se vale (iii) un semplice calcolo mostra che

$$\int_{u^{-1}([u^*(s+h), u^*(s)])} d\mathcal{M} = h \quad (1.33)$$

per h positivo e sufficientemente piccolo. Dalla disuguaglianza di Jensen per le funzioni convesse segue

$$\frac{1}{h} \int_{u^{-1}([u^*(s+h), u^*(s)])} \Phi(|\nabla u|) d\mathcal{M} \geq \Phi \left(\frac{1}{h} \int_{u^{-1}([u^*(s+h), u^*(s)])} |\nabla u| d\mathcal{M} \right), \quad (1.34)$$

e di conseguenza si ha

$$\frac{d}{ds} \int_{\{(x,y) \in \mathbb{H}^2 : u(x,y) > u^*(s)\}} \Phi(|\nabla u|) d\mathcal{M} \geq \Phi \left(\frac{d}{ds} \int_{\{(x,y) \in \mathbb{H}^2 : u(x,y) > u^*(s)\}} |\nabla u| d\mathcal{M} \right). \quad (1.35)$$

Le disuguaglianze (1.31) e (1.35) implicano quindi la (1.32).

La dimostrazione della disuguaglianza (1.21) è a portata di mano. La (1.21) segue dalla (1.32) e dalla disuguaglianza

$$\int_{\mathbb{H}^2} \Phi(|\nabla u|) d\mathcal{M} \geq \int_0^\infty ds \frac{d}{ds} \int_{\{(x,y) \in \mathbb{H}^2 : u(x,y) > u^*(s)\}} \Phi(|\nabla u|) d\mathcal{M}. \quad (1.36)$$

Per la parte rimanente della dimostrazione procediamo nel modo seguente. Sia s definito da

$$s(x, y) = \frac{\pi}{y} [x^2 + (y-1)^2]. \quad (1.37)$$

Osserviamo che: (i) $s(x, y) \geq 0$ if $y > 0$; (ii) s soddisfa l'equazione alle derivate parziali

$$y^2 (s_x^2 + s_y^2) = 4\pi s + s^2; \quad (1.38)$$

(iii) per ogni t positivo, le linee di livello su cui $s(x, y) = t$ sono circonferenze geodetiche di \mathbb{H}^2 la cui lunghezza riemanniana è $\sqrt{4\pi t + t^2}$. Dalle (i), (ii) e (iii) e dalla formula della coarea deriviamo che

$$\int_{\mathbb{H}^2} f(s(x, y)) d\mathcal{M} = \int_0^\infty f(t) dt \quad (1.39)$$

se f è definita in $[0, \infty[$ e decade abbastanza velocemente vicino a 0 e ad ∞ . Dalla definizione di u^\star — equazione (1.16) — e dall'equazione (1.38) deduciamo che

$$|\nabla u^\star| = \sqrt{4\pi s + s^2} \left[-\frac{du^\star}{ds}(s) \right]. \quad (1.40)$$

Concludiamo la dimostrazione osservando che la (1.22) segue dalle equazioni (1.39) e (1.40).

1.3 Lemmi

Lemma 1.1 (i) *La disuguaglianza seguente*

$$\frac{\int_0^\infty s |du(s)|}{\int_0^\infty |u(s)| ds} \geq 1 \quad (1.41)$$

vale per ogni funzione u non nulla a valori reali tale che: u ha variazione limitata, l'integrale $\int_0^\infty s |du(s)|$ è finito, e $u(\infty) = 0$. Il secondo membro della (1.41) è il valore minimo assunto dal primo membro, ed ogni funzione positiva decrescente è una mimimante.

(ii) *Se $1 < p < \infty$, allora*

$$\frac{\int_0^\infty |su'(s)|^p ds}{\int_0^\infty |u(s)|^p ds} > p^{-p} \quad (1.42)$$

per ogni funzione u non nulla a valori reali tale che: u è assolutamente continua, l'integrale $\int_0^\infty |su'(s)|^p ds$ è finito, e $u(\infty) = 0$. Il primo membro della (1.42) è minimo limite — non raggiunto — del primo membro; una successione mimimante è data da

$$u_k(s) = s^{-1/p+1/k} e^{-s} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Lemma 1.2 (i) *La disuguaglianza seguente*

$$\frac{\left\{ \int_0^\infty \sqrt{s} |du(s)| \right\}^2}{\int_0^\infty [u(s)]^2 ds} \geq 1 \quad (1.43)$$

vale per ogni funzione u non nulla a valori reali tale che: u ha variazione limitata, l'integrale $\int_0^\infty \sqrt{s} |du(s)|$ è finito, e $u(\infty) = 0$. Il secondo membro della (1.43) è il valore minimo assunto dal primo membro; la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, 1]$, ed ogni sua versione riscalata, sono minimanti.

(ii) Sia $1 < p < 2$ e $q = 2p/(2 - p)$. Allora

$$\frac{\left\{ \int_0^\infty s^{p/2} |u'(s)|^p ds \right\}^{2/p}}{\left\{ \int_0^\infty |u(s)|^q ds \right\}^{2/q}} \geq \frac{4\pi(q/2 - 1)^{2/q}}{q^2 \sin(2\pi/q)} \quad (1.44)$$

per ogni funzione u non nulla a valori reali tale che: u è assolutamente continua, l'integrale $\int_0^\infty s^{p/2} |u'(s)|^p ds$ è finito, e $u(\infty) = 0$. Il secondo membro è il valore minimo assunto dal primo membro; una minimante è data da

$$u(s) = \left[1 + s^{q/(q-2)} \right]^{-2/q},$$

ed ogni altra minimante è un riscalamento di questa.

Lemma 1.3 (i) *Siano A e B costanti non negative. La disuguaglianza seguente*

$$\frac{\left\{ \int_0^\infty \sqrt{s^2 + 4\pi s} |du(s)| \right\}^2}{A \left\{ \int_0^\infty |u(s)| ds \right\}^2 + B \int_0^\infty |u(s)|^2 ds} \geq 1 \quad (1.45)$$

vale per ogni u non nulla se e solo se

$$A \leq 1 \quad e \quad B \leq 4\pi. \quad (1.46)$$

dove u è una funzione a valori reali a variazione limitata tale che gli integrali $\int_0^\infty s |du(s)|$ e $\int_0^\infty \sqrt{s} |du(s)|$ sono finiti, e $u(\infty) = 0$.

(ii) Sia $1 \leq p < 2$ e $q = 2p/(2 - p)$, e supponiamo che A e B siano costanti non negative. La disuguaglianza

$$\frac{\left\{ \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{p/2} |u'(s)|^p ds \right\}^{2/p}}{A \left\{ \int_0^\infty |u(s)|^p ds \right\}^{2/p} + B \left\{ \int_0^\infty |u(s)|^q ds \right\}^{2/q}} \geq 1 \quad (1.47)$$

vale per ogni u non nulla se e solo se

$$A \leq p^{-2} \quad e \quad B \leq \frac{(4\pi/q)^2 (q/2 - 1)^{2/q}}{\sin(2\pi/q)}, \quad (1.48)$$

dove u è una funzione assolutamente continua a valori reali per cui gli integrali $\int_0^\infty |su'(s)|^p ds$ e $\int_0^\infty s^{p/2} |u'(s)|^p ds$ siano finiti e $u(\infty) = 0$.

Lemma 1.4 Sia $2 < p < \infty$, indichiamo con p' la quantità $p/(p-1)$. Allora

$$\frac{\sup |u|}{\left\{ \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{p/2} |u'(s)|^p ds \right\}^{2/p}} \leq (4\pi)^{-1/p} \left\{ \frac{\Gamma(1 - p'/2)\Gamma(p' - 1)}{\Gamma(p'/2)} \right\}^{1/p'} \quad (1.49)$$

per ogni funzione u non nulla a valori reali assolutamente continua per cui gli integrali $\int_0^\infty |su'(s)|^p ds$ e $\int_0^\infty s^{p/2} |u'(s)|^p ds$ siano finiti e $u(\infty) = 0$. Il secondo membro della (1.49) è esattamente il valore massimo del primo membro.

Dimostrazione del lemma 1.1 Una dimostrazione dell'enunciato (i) può essere ricavata facilmente e qui viene omessa.

L'enunciato (ii) segue da [HLP], teorema 328 — una variante della disuguaglianza di Hardy.

Dimostrazione del lemma 1.2 (i) Sostituendo u con $]0, \infty[s \mapsto \int_s^\infty |du(t)|$ l'insieme delle funzioni in competizione resta invariato ma il primo membro della (1.43) decresce. Quindi, non c'è perdita di generalità aggiungendo l'ipotesi che u sia una funzione a valori non negativi e decrescente.

Si ha

$$\int_0^s \frac{u(t)}{\sqrt{t}} dt \geq u(s) \int_0^s \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

per via della monotonicità di u , di conseguenza

$$u(s) \leq \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_0^s \frac{u(t)}{\sqrt{t}} dt$$

e

$$[u(s)]^2 \leq \frac{d}{ds} \left\{ \int_0^s \frac{u(t)}{2\sqrt{t}} dt \right\}^2$$

per ogni s positivo. Quindi

$$\int_0^\infty [u(s)]^2 ds \leq \left\{ \int_0^\infty \frac{u(t)}{2\sqrt{t}} dt \right\}^2$$

D'altra parte, da $u(s) = \int_s^\infty [-du(t)]$ segue

$$\int_0^\infty \frac{u(t)}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty \sqrt{s} [-du(s)].$$

Abbiamo fatto vedere che

$$\int_0^\infty [u(s)]^2 ds \leq \left\{ \int_0^\infty \sqrt{s} [-du(s)] \right\}^2.$$

La disuguaglianza (1.43) è dimostrata. La parte rimanente dell'enunciato (i) segue da una verifica diretta.

(ii) Un teorema di Bliss [Bli30] afferma che se $1 < p < q$ allora

$$\frac{\left\{ \int_0^\infty |w'(t)|^p dt \right\}^{1/p}}{\left\{ \int_0^\infty |w(t)|^q t^{-1-q(1-1/p)} dt \right\}^{1/q}} \geq \left(q - \frac{q}{p} \right)^{1/q} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{pq}{q-p}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-p}\right) \Gamma\left(\frac{p(q-1)}{q-p}\right)} \right\}^{1/p-1/q}$$

per ogni funzione w non nulla a valori reali assolutamente continua per cui l'integrale $\int_0^\infty |w'(t)|^p dt$ sia finito e $w(0) = 0$. Il secondo membro della disuguaglianza sopra è il *minimo valore* assunto dal primo membro; una *minimante* è data da

$$w(t) = t \left(t^{q/p-1} + 1 \right)^{-p/(q-p)},$$

e ogni altra minimante si ottiene da questa per riscaldamento. (Il teorema di Bliss si è rivelato strimentale per la dimostrazione di disuguaglianze di tipo Sobolev: si balsa su metodi tipici del calcolo delle variazioni classico e sulla possibilità di scrivere in forma chiusa le soluzioni dell'equazione di Eulero che ne derivate — un'equazione di Emden-Fowler. Sfortunatamente l'enunciato 270 in [HLP] è inficiato da un errore di stampa.)

Scegliendo $q = 2p/(2-p)$ ed applicando il teorema di Bliss alle funzioni test della forma

$$]0, \infty[\ni t \mapsto u \left(t^{1-q/2} \right)$$

otteniamo l'enunciato (ii).

Dimostrazione del lemma 1.3 Focalizziamo l'attenzione sull'enunciato (ii) — la dimostrazione di (i) è molto simile.

Supponiamo $1 < p < 2$ e $q = 2p/(2-p)$, e che A e B soddisfino la (3.6b). Se u è una funzione in competizione, si ha Let us focus on statement (ii) — the proof of (i) is similar.

$$\left\{ \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{p/2} |u'(s)|^p ds \right\}^{p/2} \geq t^{1-p/2} \int_0^\infty |s u'(s)|^p ds + (1-t)^{1-p/2} (4\pi)^{p/2} \int_0^\infty s^{p/2} |u'(s)|^p ds$$

per ogni t tale che $0 \leq t \leq 1$, di conseguenza

$$\left\{ \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{p/2} |u'(s)|^p ds \right\}^{2/p} \geq \left\{ \int_0^\infty |s u'(s)|^p ds \right\}^{2/p} + 4\pi \left\{ \int_0^\infty s^{p/2} |u'(s)|^p ds \right\}^{2/p}.$$

Abbiamo fatto uso della formula

$$(a+b)^k = \max \{ t^{1-k} a^k + (1-t)^{1-k} b^k : 0 \leq t \leq 1 \},$$

dove $0 < k < 1$ ed a e b sono positivi. Quindi, per i lemmi 3.1 e 3.2 danno

$$\left\{ \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{p/2} |u'(s)|^p ds \right\}^{2/p} \geq p^{-2} \left\{ \int_0^\infty |u(s)|^p ds \right\}^{2/p} + \frac{(4\pi/q)^2 (q/2 - 1)^{2/q}}{\sin(2\pi/q)} \left\{ \int_0^\infty |u(s)|^q ds \right\}^{2/q}.$$

Segue la disuguaglianza (1.47).

Supponiamo A e B costanti positive per cui valga la disuguaglianza (1.47) per ogni funzione test u . Se λ è una costante positiva e u viene riscalata — cioè sostituita da $]0, \infty[\ni s \mapsto u(\lambda s)$ — la disuguaglianza (1.47) diventa

$$\frac{\left\{ \int_0^\infty (s^2 + 4\pi \lambda s)^{p/2} |u'(s)|^p ds \right\}^{2/p}}{A \left\{ \int_0^\infty |u(s)|^p ds \right\}^{2/p} + B \lambda \left\{ \int_0^\infty |u(s)|^q ds \right\}^{2/q}} \geq 1.$$

Passando al limite per $\lambda \rightarrow 0$

$$\frac{\int_0^\infty |su'(s)|^p ds}{\int_0^\infty |u(s)|^p ds} \geq A,$$

passando invece al limite per $\lambda \rightarrow \infty$

$$\frac{\left\{ \int_0^\infty s^{p/2} |u'(s)|^p ds \right\}^{2/p}}{\left\{ \int_0^\infty |u(s)|^q ds \right\}^{2/q}} \geq B.$$

Utilizzando i lemmi 1.1 e 1.2 seguono le disuguaglianze (1.48). La dimostrazione è completa.

Dimostrazione del lemma 1.4 Chiaramente

$$\sup |u| \leq \int_0^\infty |u'(s)| ds,$$

e

$$\int_0^\infty |u'(s)| ds \leq \left\{ \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{p/2} |u'(s)|^p ds \right\}^{1/p} \left\{ \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{-p'/2} ds \right\}^{1/p'}$$

per la disuguaglianza di Hölder. Quindi

$$\frac{\sup |u|}{\left\{ \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{p/2} |u'(s)|^p ds \right\}^{1/p}} \leq \left\{ \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{-p'/2} ds \right\}^{1/p'}.$$

L'uguaglianza in vale soltanto se u soddisfa

$$u(\infty) = 0, \quad u'(s) = -(s^2 + 4\pi s)^{-p'/2}.$$

Segue il lemma.

1.4 Dimostrazione del teorema 1.1

Sia u una funzione a valori reali lipschitziana a supporto compatto definita nello spazio iperbolico \mathbb{H}^2 . La teoria esposta nel paragrafo 2 ci dice che il riordinamento di u , indicato con u^\star , è lipschitziano e con supporto in un cerchio geodetico di raggio finito. Inoltre, u^\star soddisfa

$$\int_{\mathbb{H}^2} |\nabla u^\star|^p d\mathcal{M} \leq \int_{\mathbb{H}^2} |\nabla u|^p d\mathcal{M} \quad (1.50)$$

per ogni p maggiore (o uguale) a 1, e

$$\int_{\mathbb{H}^2} (u^\star)^q d\mathcal{M} = \int_{\mathbb{H}^2} |u|^q d\mathcal{M}. \quad (1.51)$$

Quindi l'insieme delle funzioni in competizione e il primo membro delle disuguaglianze (1.1)-(1.5) sono *invarianti* rispetto all'applicazione $u \mapsto u^\star$, ed il secondo membro della

stessa disuguaglianza *decrese* sotto questa applicazione. In altre parole, le funzioni in competizione significative in questo contesto sono *onde circolari* u che verificano

$$u(x, y) = u^* \left(\frac{\pi}{y} (x^2 + (y-1)^2) \right), \quad (1.52)$$

dove u^* è definita in $[0, \infty[$, è decrescente e localmente lipshitziana, e si annulla in un intorno di infinito.

Dall'equazione (1.52) segue

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} y^p (u_x^2 + u_y^2)^{p/2} \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{p/2} \left[-\frac{du^*}{ds}(s) \right]^p ds \quad (1.53)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^\infty [u^*(s)]^q ds. \quad (1.54)$$

Le equazioni (1.53) e (1.54) trasformano le disuguaglianze (1.1)-(1.5) nelle seguenti:

$$(i) \quad \left\{ \int_0^\infty u^*(s) ds \right\}^2 + 4\pi \int_0^\infty [u^*(s)]^2 ds \leq \left\{ \int_0^\infty \sqrt{s^2 + 4\pi s} \left[-\frac{du^*}{ds}(s) \right] ds \right\}^2; \quad (1.55)$$

$$(ii) \quad p^{-2} \left\{ \int_0^\infty [u^*(s)]^p ds \right\}^{2/p} + \frac{(4\pi/q)^2 (q/2 - 1)^{2/q}}{\sin(2\pi/q)} \left\{ \int_0^\infty [u^*(s)]^q ds \right\}^{2/q} \leq \left\{ \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{p/2} \left[-\frac{du^*}{ds}(s) \right]^p ds \right\}^{2/p}, \quad (1.56)$$

dove $1 < p < 2$ e $q = 2p/(2-p)$;

$$(iii) \quad u^*(0) \leq (4\pi)^{-1/p} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{p-2}{2(p-1)}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2(p-1)}\right)} \right\}^{1-1/p} \times \left\{ \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{p/2} \left[-\frac{du^*}{ds}(s) \right]^p ds \right\}^{2/p}, \quad (1.57)$$

dove $p > 2$;

$$(iv) \quad \int_0^\infty [u^*(s)]^p ds \leq p^p \int_0^\infty (s^2 + 4\pi s)^{p/2} \left[-\frac{du^*}{ds}(s) \right]^p ds, \quad (1.58)$$

dove $1 \leq p < \infty$. Le disuguaglianze (1.55), (1.56) e (1.58) seguono dal Lemma 1.3; la disuguaglianza (1.57) segue dal lemma 1.4. Gli stessi lemmi — insieme ad appropriate considerazioni di densità — mostrano che le disuguaglianze in questione sono ottimali.

La dimostrazione del teorema 1.1 è così completata.

Capitolo 2

Il caso $p = 2$

2.1 Geometria del semipiano iperbolico

1.1 Sia \mathbb{H}^2 il semipiano \mathbb{R}_+^2 dotato della metrica di *Poincaré-Bergman*. Oltre alle proprietà ricordate nel paragrafo 1.1, \mathbb{H}^2 gode anche delle proprietà seguenti — si vedano ad esempio [Bia27] capitolo 14, [McC94], paragrafo 15, [SG70] paragrafo 9.5 e [Sie71] paragrafo 2.2.

La *lunghezza* riemanniana di un vettore tangente ad \mathbb{H}^2 in un punto (a, b) è uguale a $y \times$ (*lunghezza euclidea*). Le *geodetiche* di \mathbb{H}^2 sono le semirette e le semicirconferenze ortogonali all'asse x . La *distanza riemanniana* tra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è la lunghezza dell'arco di geodetica che unisce (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e soddisfa

$$\cosh(\text{distanza}) = \frac{1}{2y_1 y_2} [(x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + y_2^2]. \quad (2.1)$$

L'*area riemanniana* in \mathbb{H}^2 , \mathcal{M} , è data da

$$d\mathcal{M} = \frac{dx dy}{y^2} \quad (2.2)$$

Il *cerchio geodetico* in \mathbb{H}^2 di centro (a, b) e raggio r ha equazione

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = [2 \sinh(r/2)]^2 b y \quad (2.3)$$

— e quindi coincide con il cerchio euclideo di centro $(a, b \cosh r)$ il cui raggio è $b \sinh r$. Area, perimetro e raggio riemanniani di un cerchio geodetico in \mathbb{H}^2 soddisfano le relazioni

$$\text{raggio} = \log [1 + (2\pi)^{-1}(\text{area} + \text{perimetro})] \quad (2.4)$$

$$\text{area} = \pi [2 \sinh(\text{raggio}/2)]^2 \quad (2.5)$$

$$\text{perimetro} = [(\text{area})^2 + 4\pi(\text{area})]^{1/2} = 2\pi \sinh(\text{raggio}). \quad (2.6)$$

L'*operatore di Laplace-Beltrami* su \mathbb{H}^2 , Δ , è dato da

$$\Delta = y^2 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (2.7)$$

La *curvatura* di \mathbb{H}^2 è -1 . Le affermazioni che seguono sono strettamente collegate alla curvatura di \mathbb{H}^2 e al contesto attuale — la prima appare in [McK70], la seconda, nota come *teorema isoperimetrico* in \mathbb{H}^2 si trova, ad esempio, su [BZ88b] capitolo 10 e in [Cha94], capitolo 6.

Lo spettro di $-\Delta : L^2(\mathbb{H}^2) \mapsto L^2(\mathbb{H}^2)$ è esattamente $[1/4, \infty[$.

Se E è un sottoinsieme regolare di \mathbb{H}^2 , allora *perimetro* ed *area* riemanniani di E , soddisfano la disuguaglianza. Se l'area di E è finita, allora

$$\text{perimetro} \geq \sqrt{\text{area}(\text{area} + 4\pi)}; \quad (2.8)$$

inoltre, l'uguaglianza nella (2.8) vale se e solo se E è un disco.

1.2 La struttura di una disuguaglianza di Sobolev su una varietà riemanniana è determinata dalla curvatura. Una tipica *disuguaglianza di Sobolev nello spazio iperbolico* \mathbb{H}^2 afferma che per p, q opportuni — $p \geq 1, q \geq p, 1/q \geq 1/p - 1/2$ e $R \leq p^{-2}$ — allora esiste una costante positiva tale che

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} y^p (u_x^2 + u_y^2)^{p/2} \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/p} \geq (\text{costante}) \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/q} + R \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^p \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/p} \quad (2.9)$$

per ogni funzione test u .

Si osservi che

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^p \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{1/p} = \left\{ \int_{\mathbb{H}^2} |u|^p d\mathcal{M} \right\}^{1/p},$$

è la *norma di u nello spazio di Lebesgue* $L^p(\mathbb{H}^2)$, e similmente

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{1/q} = \left\{ \int_{\mathbb{H}^2} |u|^q d\mathcal{M} \right\}^{1/q},$$

è la *norma di u in* $L^q(\mathbb{H}^2)$. D'altra parte

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} y^p (u_x^2 + u_y^2)^{p/2} \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{1/p} = \left\{ \int_{\mathbb{H}^2} |\nabla u|^p d\mathcal{M} \right\}^{1/p},$$

è la *norma di ∇u in* $(L^p(\mathbb{H}^2))^2$.

Dimostrazione: se u è un campo scalare su \mathbb{H}^2 , allora ∇u , derivata covariante di u , è il vettore tangente al campo in \mathbb{H}^2 le cui componenti sono u_x ed u_y e la cui lunghezza riemanniana $|\nabla u|$, è uguale a $y\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$.

In conclusione, la disuguaglianza (2.9) si può interpretare come

$$\|\nabla u\|_{(L^p(\mathbb{H}^2))^2}^2 \geq (\text{costante}) \|u\|_{L^q(\mathbb{H}^2)}^2 + R \|u\|_{L^p(\mathbb{H}^2)}^2.$$

Sia

$$C(p, q, R) = \text{la più grande costante} \quad (2.10)$$

per cui la disuguaglianza (2.9) è soddisfatta da tutte le funzioni test u . I risultati enunciati nel teorema 1.1 — che è stato ottenuto come conseguenza della disuguaglianza isoperimetrica in \mathbb{H}^2 — si possono riassumere nelle equazioni seguenti:

$$C(p, q, R) = p^{-2} \quad (2.11)$$

se $1 \leq p < \infty$, $q = p$ e $R = 0$;

$$C(p, q, R) = 4\pi \quad (2.12)$$

se $p = 1$, $q = 2$ e $-\infty < R \leq 1$;

$$C(p, q, R) = \left(\frac{4\pi}{q}\right)^2 \left(\frac{q}{2} - 1\right)^{2/q} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{q}\right)\right]^{-1} \quad (2.13)$$

se $1 < p < 2$, $q = 2p/(2-p)$ e $-\infty < R \leq p^{-2}$;

$$C(p, q, R) = (4\pi)^{2/p} \left[\Gamma\left(\frac{p}{2(p-1)}\right)\right]^{2-2/p} \left[\Gamma\left(\frac{p-2}{2(p-1)}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p-1}\right)\right]^{2/p-2} \quad (2.14)$$

se $2 < p < \infty$, $q = \infty$ e $R = 0$.

1.4. In base alle osservazioni fatte nel paragrafo 1.1, la più piccola costante A per cui la disuguaglianza di Fraenkel (1.27) e (0.3) è vera per ogni funzione test u è data da

$$A^{-2} = C(p, q, -3/4)$$

— in questo caso $p = 2$ e $2 < q < \infty$, un caso *non* coperto dalle equazioni (2.11)-(2.14).

In questo capitolo ci occuperemo proprio di tale caso, studiando la costante $C(2, q, R)$.

Per definizione,

$$C(2, q, R) = \inf \frac{\int_{\mathbb{R}_+^2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy - R \int_{\mathbb{R}_+^2} u^2 y^{-2} dx dy}{\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q y^{-2} dx dy \right\}^{2/q}} \quad (2.15)$$

con u funzione test, $u \not\equiv 0$.

In alternativa, si può osservare che, se u è regolare a sufficienza,

$$\int (u_x^2 + u_y^2) dx dy = - \int (u_{xx} + u_{yy}) u dx dy;$$

il primo membro è l'*integrale di Dirichlet* classico, il secondo membro invece è il *prodotto scalare* di $(-\Delta u)$ e u in $L^2(\mathbb{H}^2)$. Quindi $C(2, q, R)$ coincide con la più grande costante per cui

$$((-\Delta - R)u, u)_{L^2(\mathbb{H}^2)} \geq (\text{Constant}) \cdot \|u\|_{L^q(\mathbb{H}^2)}^2 \quad (2.16)$$

per ogni funzione test u .

Nella dimostrazione del lemma 2.2 saranno introdotte le coordinate polari geodetiche in \mathbb{H}^2 con qualche piccola variante. In base a considerazioni di analisi dimensionale, proprietà spettrali dell'operatore di Laplace-Beltrami in \mathbb{H}^2 , la formula (2.15) e la disuguaglianza (2.16) mostrano che

$$C(2, q, R) = \begin{cases} -\infty & \text{if } R > 1/4, \\ 0 & \text{if } q < 2 \text{ e } R \leq 1/4. \end{cases} \quad (2.17)$$

2.2 Risultati principali

Teorema 2.1 *Supponiamo $2 < q < \infty$ e $-\infty < R < 1/4$.*

Esiste una funzione test u tale che $u \not\equiv 0$ e

$$C(2, q, R) = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy - R \int_{\mathbb{R}_+^2} u^2 y^{-2} dx dy}{\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q y^{-2} dx dy \right\}^{2/q}}; \quad (2.18)$$

sia $C(2, q, R)$ e u sono determinate con il procedimento seguente.

Esiste una funzione reale v , definita in $[0, +\infty[$, v , tale che:

(i) *v soddisfa la seguente equazione differenziale*

$$\frac{d}{ds} (s(s + 4\pi)v'(s)) + Rv(s) + |v(s)|^{q-2} \cdot v(s) = 0 \quad (2.19)$$

per $0 < s < \infty$.

(ii) *v soddisfa le seguenti condizioni al contorno*

$$-4\pi v'(0) = Rv(0) + |v(0)|^{q-2} \cdot v(0), \quad v(\infty) = 0, \quad (2.20)$$

e tende a zero all'infinito in modo che

$$\int_0^\infty (sv'(s))^2 ds < \infty. \quad (2.21)$$

(iii) *v è strettamente decrescente.*

(2.22)

Sia (a, b) un punto di \mathbb{H}^2 . Vale la seguente equazione:

$$C(2, q, R) = \left\{ \int_0^\infty |v(s)|^q ds \right\}^{1-2/q}, \quad (2.23)$$

e

$$u(x, y) = v \left(\frac{\pi}{by} \left((x - a)^2 + (y - b)^2 \right) \right) \quad (2.24)$$

per ogni (x, y) in \mathbb{H}^2 — in altri termini,

$$u(x, y) = v(s), \quad (2.25)$$

$$s = \pi [2 \sinh(r/2)]^2 = \text{Area riemanniana di un cerchio geodetico di raggio } r, \quad (2.26)$$

$$r = \text{distanza riemanniana tra } (a, b) \text{ e } (x, y). \quad (2.27)$$

Osservazioni

(i) Dalle equazioni (2.24), (2.25), (2.26) e (2.27) sappiamo che u è *radiale e radialmente decrescente* — il valore di u in un punto (x, y) dipende solamente dalla distanza riemanniana tra (a, b) e (x, y) , e decresce al crescere di tale distanza.

Utilizzando le coordinate polari geodetiche si ha

$$\Delta u(x, y) = \frac{d}{ds} [s(s + 4\pi)v'(s)], \quad (2.28)$$

come descritto nel seguito nella dimostrazione del lemma 2.2. Introducendo la (2.28) nella (2.19),

$$\Delta u + Ru + |u|^{q-2} \cdot u = 0 \quad (2.29)$$

— nel linguaggio del calcolo delle variazioni, la (2.29) è esattamente l'*equazione di Eulero* derivante dalle (2.15), (2.18) e da una normalizzazione.

(ii) Il coefficiente principale della equazione (2.19) è un polinomio di grado due con due radici distinte. Il motivo di ciò è la curvatura di \mathbb{H}^2 : il coefficiente in questione è infatti $= 4\pi s - (\text{curvature})s^2$.

Sebbene sia più complicata di equazioni della forma

$$(4\pi s \cdot v')' + (\text{termini di ordine inferiore}) = 0$$

— che compaiono in [Kam59], sezioni da 6.73 a 6.76, e quando si considerano casi limite di disuguaglianze di Sobolev nel piano euclideo — l'equazione (2.19) ha alcune soluzioni particolari esprimibili in *forma chiusa*. La funzione definita da

$$v(s) = (q - 2)^{-2/(q-2)} \left(1 + \frac{s}{4\pi}\right)^{-1/(q-2)} \quad (2.30)$$

soddisfa la (2.19) se $q > 2$ e $R = (q - 3)(q - 2)^{-2}$. La funzione definita da

$$v(s) = \left[\frac{2q}{(q - 2)^2}\right]^{1/(q-2)} \left(1 + \frac{s}{2\pi}\right)^{-2/(q-2)} \quad (2.31)$$

soddisfa invece la (2.19) per $q > 2$ e $R = 2(q - 4)(q - 2)^{-2}$.

(iii) Alcune soluzioni *radiali* dell'equazione (2.10) si ricavano in base alle osservazioni precedenti. La funzione definita da

$$u(x, y) = \left[\frac{2}{(q - 2)}\right]^{2/(q-2)} \left[\frac{by}{(x - a)^2 + (y + b)^2}\right]^{1/(q-2)} \quad (2.32)$$

soddisfa la (2.29) nel caso in cui $q > 2$ e $R = (q - 3)(q - 2)^{-2}$; la funzione

$$u(x, y) = \left[\frac{4q}{(q - 2)^2}\right]^{1/(q-2)} \left[\frac{by}{(x - a)^2 + y^2 + b^2}\right]^{2/(q-2)} \quad (2.33)$$

soddisfa infine la (2.29) per $q > 2$ e $R = 2(q - 4)(q - 2)^{-2}$.

A meno di costanti moltiplicative, alcune di queste soluzioni compaiono nel teorema 2.2, e una di esse compare tra le righe nel paragrafo 1.1.

(iv) La funzione definita dalla (2.30) soddisfa le condizioni al contorno (2.20). La proprietà (2.21) vale sotto l'ipotesi aggiuntiva $q \leq 4$, mentre la (2.22) vale in ogni caso. La funzione definita dalla (2.31) si comporta in modo analogo se $2 < q \leq 6$.

Riunendo le (2.23), (2.30) e (2.31) si ha

$$C(2, q, R) = (2\pi)^{1-2/q} (q - 2)^{-1-2/q} \quad (2.34)$$

nel caso

$$-\infty < R \leq 1/4, \quad q = 2 + 2 \cdot \left(1 + \sqrt{1 - 4R}\right)^{-1},$$

e

$$C(2, q, R) = (2\pi)^{1-2/q} (q-2)^{-1-2/q} \cdot 2q(q+2)^{-1+2/q} \quad (2.35)$$

per

$$-\infty < R \leq 1/4, \quad q = 2 + 4 \cdot \left(1 + \sqrt{1 - 4R}\right)^{-1}.$$

Ci si potrebbe chiedere se le formule (2.34) e (2.35) sono effettivamente corrette: confrontando con i risultati di Fraenkel sappiamo che la (2.35) vale per $q = 10/3$ e $R = -3/4$. Il teorema 2.2 mostra che le (2.34) e (2.35) identificano $C(2, q, R)$ nel caso in cui R è zero.

(v) Se $q > 2$ (ma non troppo grande) e $R < 1/4$, allora $C(2, q, R)$ può essere calcolata accuratamente mediante un algoritmo. Tale algoritmo consiste in: (i) risolvere l'equazione (2.19) sotto le condizioni (2.20) e (2.21) utilizzando un metodo di shooting ([FP82] vol. 2, [CB72]); (ii) individuare una soluzione soddisfacente la condizione (2.22); (iii) verificare l'unicità di tale soluzione mediante un test opportuno; (iv) utilizzare la formula (2.23).

Dettagli in proposito si trovano nel capitolo successivo. Alcuni valori sono riportati nella tabella sottostante.

q	$C(2, q, 0)$	q	$C(2, q, 0)$
3.0	1.8452701	8.0	3.6479107
10/3	2.2655626	8.5	3.6096511
3.5	2.4484193	9.0	3.5635303
4.0	2.8944050	9.5	3.5119626
4.5	3.2085021	10.0	3.4567447
5.0	3.4207189	11.0	3.3403841
5.5	3.5569171	12.0	3.2216028
6.0	3.6372463	13.0	3.1043799
6.5	3.6767932	14.0	2.9908876
7.0	3.6866772	15.0	2.8823095
7.5	3.6750545		

Teorema 2.2 (i) $C(2, 3, 0) = (2\pi)^{1/3}$, cioè la disuguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy \geq (2\pi)^{1/3} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^3 \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/3} \quad (2.37)$$

vale per ogni funzione test u ed è ottimale. L'uguaglianza nella (2.36) vale se

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + (y+1)^2}.$$

(ii) $C(2, 4, 0) = (8\pi/3)^{1/2}$, cioè la disuguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy \geq \left\{ \frac{8\pi}{3} \int_{\mathbb{R}_+^2} u^4 \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{1/2} \quad (2.38)$$

vale per ogni funzione test u ed è ottimale. L'uguaglianza nella (2.37) è raggiunta per

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

2.3 Lemmi principali

I lemmi in questo paragrafo, in particolare il lemma 2.3, mostrano come si possa far corrispondere alle disuguaglianze di Sobolev in questione un problema variazionale di dimensione uno.

Lemma 2.1 *Sia u una funzione test, allora esiste una funzione a valori reali u^* , definita in $[0, \infty[$, tale che*

- (i) $u^*(\infty) = 0$;
- (ii) u^* è decrescente;
- (iii) u^* e u sono equidistribuite;
- (iv) u^* è assolutamente continua e soddisfa la disuguaglianza seguente

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy \geq \int_0^\infty s(s + 4\pi) \left[\frac{du^*}{ds}(s) \right]^2 ds.$$

Dimostrazione. Sia μ la applicazione decrescente di $[0, \infty[$ in $[0, \infty]$ continua a destra definita dalla formula seguente

$$\mu(t) = \text{area riemanniana di } \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 : |u(x, y)| > t\}, \quad (2.39)$$

e sia u^* l'applicazione da $[0, \infty[$ in $[0, \infty]$ definita da

$$u^*(s) = \min \{t \geq 0 : \mu(t) \leq s\}. \quad (2.40)$$

(Queste definizioni sono simili a quelle introdotte da Hardy e Littlewood e rielaborate successivamente da vari autori: μ è la *funzione distribuzione*, u^* è il *riordinamento* di u — si vedano [HLP] capitolo 10, [Kaw85], [Kol89], [Bae94], [Tal94], e i riferimenti in essi citati.)

Chiaramente, le formule (2.39) e (2.40) implicano le proprietà (i) e (ii).

Dalle stesse formule, dopo un breve ragionamento segue $\{s \geq 0 : u^*(s) > t\} = [0, \mu(t)[$ per ogni t non negativa. Ne deduciamo che l'equazione

$$\text{lunghezza di } \{s \geq 0 : u^*(s) > t\} = \text{area riemanniana di } \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 : |u(x, y)| > t\} \quad (2.41)$$

vale per ogni t non negativo. La proprietà (iii) è così dimostrata.

Una versione di un teorema, fondamentale in questo contesto e che si può trovare in [Bae94], paragrafi 3 e 4 e nel capitolo precedente, implica la proprietà (iv). \square

Lemma 2.2 *Sia v sia una funzione a valori reali definita in $[0, \infty[$; supponiamo che v sia regolare e che decada all'infinito abbastanza velocemente. Sia (a, b) un punto di \mathbb{H}^2 , e sia u definita da*

$$u(x, y) = v \left(\frac{\pi}{by} ((x - a)^2 + (y - b)^2) \right). \quad (2.42)$$

Allora u è una funzione test e valgono le seguenti proprietà:

- (i) u e v sono equidistribuite;
(ii) $\int_{\mathbb{R}_+^2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \int_0^\infty s(s + 4\pi)(v'(s))^2 ds$.

Dimostrazione. Per semplificare le notazioni e senza perdere in generalità possiamo supporre $a = 0$ e $b = 1$. Le equazioni seguenti

$$x = \frac{\sinh r \cdot \sin \vartheta}{\cosh r - \sinh r \cdot \cos \vartheta}, \quad y = \frac{1}{\cosh r - \sinh r \cdot \cos \vartheta}, \quad (2.43)$$

insieme alle

$$\cos \vartheta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \cdot \sqrt{x^2 + (y+1)^2}}, \quad (2.44)$$

$$\sin \vartheta = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \cdot \sqrt{x^2 + (y+1)^2}}, \quad (2.45)$$

$$\cosh r = \frac{1}{2y} (1 + x^2 + y^2), \quad (2.46)$$

con le limitazioni

$$0 \leq r < \infty, \quad -\pi < \vartheta < \pi \quad (2.47)$$

definiscono un sistema di *coordinate polari geodetiche* in \mathbb{H}^2 . Qui r indica la *distanza riemanniana* tra $(0, 1)$ e (x, y) ; una linea per cui $\vartheta = \text{Costante}$ è un *arco di geodetica* con origine in $(0, 1)$ e con angolo ϑ rispetto all'asse y .

Sia

$$s = \pi [2 \sinh(r/2)]^2, \quad (2.48)$$

l'*area riemanniana* di un disco geodetico di raggio r . In altri termini,

$$2\pi \cdot \cosh r = 2\pi + s, \quad 2\pi \cdot \sinh r = \sqrt{s(s + 4\pi)}, \quad (2.49)$$

$$s = \frac{\pi}{y} (x^2 + (y-1)^2). \quad (2.50)$$

il sistema di coordinate curvilinee individuato da s e da ϑ è particolarmente conveniente in questo contesto — tale sistema di coordinate rende possibile fra l'altro un *analisi dimensionale* delle disuguaglianze di Sobolev.

La metrica di Poincaré-Bergman soddisfa

$$y^{-2} [(dx)^2 + (dy)^2] = (dr)^2 + (\sinh r)^2 (d\vartheta)^2 \quad (2.51)$$

$$= \frac{(ds)^2}{s(s + 4\pi)} + \frac{s(s + 4\pi)}{4\pi^2} (d\vartheta)^2. \quad (2.52)$$

Dalle formule (2.51) e con le abituali regole di derivazione della geometria differenziale ricaviamo che

$$d(\text{area riemanniana}) = (\sinh r) dr d\vartheta = \frac{1}{2\pi} ds d\vartheta, \quad (2.53)$$

e che ogni funzione f sufficientemente regolare soddisfa

$$\begin{aligned} |\nabla f|^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + (\sinh r)^{-2} \left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right)^2 \\ &= s(s+4\pi) \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{s(s+4\pi)} \left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Vale inoltre la formula seguente

$$\begin{aligned} \Delta f &= (\sinh r)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sinh r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + (\sinh r)^{-2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left[s(s+4\pi) \frac{\partial f}{\partial s} \right] + \frac{4\pi^2}{s(s+4\pi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

In base all'equazione (2.42), si verifica che u è liscia, in particolare,

$$|\nabla u(x, y)| = O(r) \text{ as } r \rightarrow 0.$$

Inoltre, $u(x, y)$ tendono a zero all stessa velocità con cui r tende all'infinito.

Le equazioni (2.42) e (2.53) implicano che

$$\text{area riemanniana di } \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 : |u(x, y)| > t\} = \text{lunghezza di } \{s \geq 0 : |v(s)| > t\}$$

per ogni t non negativo — la proprietà (i) è dimostrata.

Le equazioni (2.42), (2.53) e (2.54) danno

$$\text{integrale di Dirichlet di } u = \int_0^\infty s(s+4\pi)(v'(s))^2 ds$$

— la proprietà (iii) è dimostrata. \square

Nel lemma 2.3 e nei paragrafi 2.4 e 2.5 saranno utilizzati alcuni simboli. Ne diamo qui la definizione

Definizione 2.1 Indichiamo con J il funzionale definito da

$$J(v) = \frac{\int_0^\infty s(s+4\pi)(v'(s))^2 ds - R \int_0^\infty (v(s))^2 ds}{\left\{ \int_0^\infty |v(s)|^q ds \right\}^{2/q}}. \quad (2.56)$$

Definizione 2.2 Sia \mathfrak{V} la collezione di funzioni v a valori reali, definite in $]0, \infty[$ e tali che:

(i) $v(\infty) = 0$;

(ii) v è assolutamente continua e $\int_0^\infty s(v'(s))^2 ds$ e $\int_0^\infty (sv'(s))^2 ds$ converge.

Lemma 2.3 Supponiamo $0 < q < \infty$ e $-\infty < R < \infty$. Allora valgono le affermazioni seguenti

(i) Sia l numero reale, allora o

$$\{v : 0 \neq v \in \mathfrak{V}, J(v) \leq l\} = \emptyset$$

oppure

$$\{v : 0 \neq v \in \mathfrak{V}, J(v) \leq l\} \cap \{v : v \in \mathfrak{V}, v \text{ decresce}\} \neq \emptyset.$$

(ii)

$$\inf \{J(v) : 0 \neq v \in \mathfrak{V}\} = C(2, q, R) \quad (2.57)$$

Dimostrazione. Basta combinare i lemmi 2.1 e 2.2. \square

2.4 Stime di $C(2, q, 0)$

Teorema 2.3 *La disuguaglianza*

$$C(2, q, 0) \geq \left\{ \frac{8\pi q}{(q-2)^2} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{q}{q-2}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2q}{q-2}\right)} \right\}^{1-2/q} \quad (2.58)$$

vale per $2 < q < \infty$.

Dimostrazione. Siano $2 < q < \infty$ e $R = 0$. Poiché

$$s(s+4\pi) \geq 4^{1-3/q} \cdot q \cdot \left(\frac{\pi}{q-2}\right)^{1-2/q} s^{1+2/q}$$

per ogni s positivo, si ha

$$J(v) \geq 4^{1-3/q} \cdot q \cdot \left(\frac{\pi}{q-2}\right)^{1-2/q} \int_0^\infty s^{1+2/q} (v'(s))^2 ds \times \left\{ \int_0^\infty |v(s)|^q ds \right\}^{-2/q} \quad (2.59)$$

se $0 \neq v \in \mathfrak{B}$. Applicando il lemma 2.4 deduciamo

$$J(v) \geq \left\{ \frac{8\pi q}{(q-2)^2} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{q}{q-2}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2q}{q-2}\right)} \right\}^{1-2/q} \quad (2.60)$$

se $0 \neq v \in \mathfrak{B}$. Applicando l'enunciato (ii) del lemma 2.3 si completa la dimostrazione. \square

Lemma 2.4 *Sia $2 < q < \infty$; sia v una funzione assolutamente continua a valori reali definita in $]0, \infty[$ such that $v(\infty) = 0$. Allora*

$$\int_0^\infty s^{1+2/q} (v'(s))^2 ds \geq 2q^{-2/q} \left\{ \frac{\left(\Gamma\left(\frac{q}{q-2}\right)\right)^2}{(q-2)\Gamma\left(\frac{2q}{q-2}\right)} \right\}^{1-2/q} \left\{ \int_0^\infty |v(s)|^q ds \right\}^{2/q}, \quad (2.61)$$

e l'uguaglianza vale se $v(s) = (1 + s^{1-2/q})^{-2/(q-2)}$.

Dimostrazione. La (2.61) è una variante di una disuguaglianza di Bliss, [Bla30]. \square

2.5 Altri lemmi

I lemmi contenuti in questo paragrafo sono propedeutici alla dimostrazione del teorema 2.1, e descrivono lo spazio delle funzioni \mathfrak{B} ed il funzionale J . Il lemma 2.6, insieme ad alcuni teoremi standard dell'analisi funzionale, ci permette di affermare che se $2 < q < \infty$ ogni sottoinsieme limitato di \mathfrak{B} è relativamente compatto in $L^q(0, \infty)$. Dal lemma 2.8 invece segue che se $-\infty < R < 1/4$ la restrizione di J alla sfera unitaria di $L^q(0, \infty)$ è semicontinua inferiormente.

Lemma 2.5 *Se v appartiene a \mathfrak{V} , allora*

$$(v(s))^2 \leq \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right) \cdot \left\{ \int_s^\infty t(v'(t))^2 dt + \varepsilon^{-1} \int_s^\infty (tv'(t))^2 dt \right\} \quad (2.62)$$

per ogni s e per ogni ε positivi. Vale la seguente stima asintotica:

$$v(s) = o\left(s^{-1/2}\right) \text{ as } s \rightarrow \infty, \quad v(s) = O\left(\sqrt{\log \frac{1}{s}}\right) \text{ as } s \rightarrow 0. \quad (2.63)$$

Dimostrazione. Poiché v è assolutamente continua e $v(\infty) = 0$, si ha

$$v(s) = \int_s^\infty (-v'(t)) dt$$

per ogni s positivo — ovvero

$$v(s) = \int_s^\infty (\varepsilon t + t^2)^{-1/2} \cdot (\varepsilon t + t^2)^{1/2} (-v'(t)) dt$$

se entrambi s e ε sono positivi. Quindi, la disuguaglianza di Schwarz ci dà

$$(v(s))^2 \leq \int_s^\infty \frac{dt}{\varepsilon t + t^2} \times \left\{ \varepsilon \int_s^\infty t(v'(t))^2 dt + \int_s^\infty (tv'(t))^2 dt \right\}$$

sempre per s e ε positivi. Segue la disuguaglianza (2.62).

La proprietà (2.63) è una ovvia conseguenza della (2.62). \square

Lemma 2.6 *Se $2 < q < \infty$, allora esiste una costante positiva C tale che*

$$\int_h^\infty |v(s)|^q ds \leq C \cdot (\varepsilon + h)^{1-q/2} \cdot \left\{ \varepsilon \int_0^\infty s(v'(s))^2 ds + \int_0^\infty (sv'(s))^2 ds \right\}^{q/2} \quad (2.64)$$

e

$$\int_0^\infty |v(s+h) - v(s)|^q ds \leq C \cdot \frac{h}{1+\varepsilon h} \cdot \left\{ \int_0^\infty s(v'(s))^2 ds + \varepsilon \int_0^\infty (sv'(s))^2 ds \right\}^{q/2} \quad (2.65)$$

per ogni v in \mathfrak{V} , per ogni h, ε non negativi.

Dimostrazione. Per una formula di [GR65], paragrafo 4.271, si ha

$$\int_0^\infty \left[\log\left(1 + \frac{1}{s}\right) \right]^k ds = \Gamma(k+1) \zeta(k) \quad (2.66)$$

se $k > 1$.

La formula (2.66) implica

$$\int_h^\infty \left[\log\left(1 + \frac{1}{s}\right) \right]^k ds \leq \Gamma(k+1) \zeta(k) \cdot (1+h)^{1-k} \quad (2.67)$$

se $h \geq 0$ e $k > 1$, dato che

$$(1+h)^{k-1} \int_h^\infty \left[\log\left(1 + \frac{1}{s}\right) \right]^k ds$$

decrese monotonamente al crescere di h da 0 a ∞ e $k > 1$.

Dal lemma 2.5 segue

$$\int_h^\infty |v(s)|^q ds \leq \int_h^\infty \left[\log \left(1 + \frac{\varepsilon}{s} \right) \right]^{q/2} ds \times \left\{ \int_0^\infty s(v'(s))^2 ds + \varepsilon^{-1} \int_0^\infty (sv'(s))^2 ds \right\}^{q/2}$$

per h non negativo e ε positivo. Di conseguenza

$$\int_h^\infty |v(s)|^q ds \leq \varepsilon \cdot \frac{\Gamma(1 + q/2) \zeta(q/2)}{(1 + h/\varepsilon)^{q/2-1}} \cdot \left\{ \int_0^\infty s(v'(s))^2 ds + \varepsilon^{-1} \int_0^\infty (sv'(s))^2 ds \right\}^{q/2}$$

per h non negativo e ε positivo. La disuguaglianza (2.64) è dimostrata.

Poiché $v(s+h) - v(s) = \int_s^{s+h} v'(t) dt$, si ha

$$v(s+h) - v(s) = \int_s^{s+h} (t^2 + t/\varepsilon)^{-1/2} \cdot (t^2 + t/\varepsilon)^{1/2} v'(t) dt$$

se s , h e ε sono positivi.

Dato che

$$\int_s^{s+h} \frac{dt}{t^2 + t/\varepsilon} = \varepsilon \log \frac{1 + \frac{h}{s}}{1 + \frac{\varepsilon h}{\varepsilon s + 1}} \leq \varepsilon \log \left[1 + \frac{h}{(1 + \varepsilon h)s} \right],$$

dalla disuguaglianza di Schwarz segue

$$|v(s+h) - v(s)|^2 \leq \log \left[1 + \frac{h}{(1 + \varepsilon h)s} \right] \cdot \left\{ \int_0^\infty t(v'(t))^2 dt + \varepsilon \int_0^\infty (tv'(t))^2 dt \right\}$$

se s , h e ε sono positive. Dalla (2.66) deduciamo

$$\int_0^\infty |v(s+h) - v(s)|^q ds \leq \frac{h}{1 + \varepsilon h} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{q}{2}\right) \zeta\left(\frac{q}{2}\right) \cdot \left\{ \int_0^\infty s(v'(s))^2 ds + \varepsilon \int_0^\infty (sv'(s))^2 ds \right\}^{q/2}.$$

La disuguaglianza (2.65) è dimostrata. \square

Lemma 2.7 *Sia v una funzione a valori reali definita in $]0, \infty[$; sia v assolutamente continua e sia $v(\infty) = 0$. Allora*

$$\int_0^\infty (sv'(s))^2 ds \geq \frac{1}{4} \int_0^\infty (v(s))^2 ds. \quad (2.68)$$

Dimostrazione. Passando al limite per $q \rightarrow 2$ nella (2.61), oppure in base al teorema 328 di [HLP]. Alternativamente possiamo utilizzare la disuguaglianza seguente

$$v^2 + (v + 2sv')^2 = 4(sv')^2 + 2(sv^2)',$$

o il teorema di Plancherel per la trasformata di Mellin. \square

La definizione seguente è coinvolta nel lemma 2.8 e nel paragrafo 2.69 più avanti.

Definizione 2.3 Sia K il funzionale definito da

$$K(v) = \int_0^\infty s(s+4\pi)(v'(s))^2 ds - R \int_0^\infty (v(s))^2 ds.$$

Lemma 2.8 Se $-\infty < R < 1/4$ e $v \in \mathfrak{V}$, allora

$$\sqrt{K(v)} = \sup \int_0^\infty v \left\{ -\frac{d}{ds} (s(s+4\pi)\varphi') - R\varphi \right\} ds$$

a patto che la funzione test soddisfi i requisiti:

$$\varphi \text{ liscia e si comporti bene vicino a } 0 \text{ e } \infty, K(\varphi) = 1.$$

Dimostrazione. Sia Q la forma bilineare simmetrica definita da

$$Q(v, \varphi) = \int_0^\infty s(s+4\pi)v'(s)\varphi'(s)ds - R \int_0^\infty v(s)\varphi(s)ds.$$

Dal lemma 2.7 sappiamo che $Q(v, v) \geq 0$ per ogni v in \mathfrak{V} , se $R < 1/4$. Ne deduciamo che

$$\sqrt{Q(v, v)} = \max \{Q(v, \varphi) : \varphi \in \mathfrak{V}, Q(\varphi, \varphi) = 1\}$$

per ogni v in \mathfrak{V} , se $R < 1/4$. Integrando per parti:

$$Q(v, \varphi) = \int_0^\infty v \left\{ -\frac{d}{ds} (s(s+4\pi)\varphi') - R\varphi \right\} ds$$

se $v \in \mathfrak{V}$, φ è sufficientemente regolare e si comporta bene in prossimità di 0 e ∞ , e se $K(\varphi) = 1$.

Seguono le conclusioni. \square

2.6 Dimostrazione del teorema 2.1

5.1. Esiste un elemento v di \mathfrak{V} tale che

$$\int_0^\infty |v(s)|^q ds = 1 \tag{2.69}$$

e

$$J(v) = \inf \{J(\varphi) : 0 \neq \varphi \in \mathfrak{V}\}. \tag{2.70}$$

Dimostrazione. Si tratta di far vedere che la restrizione di J alla sfera unitaria di $L^q(0, \infty)$ ammette minimo. In questa parte della dimostrazione sono utilizzati due concetti tipici del calcolo delle variazioni: la *semicontinuità* e la *compattezza*.

I lemmi 2.6 e 2.7, ed un teorema standard (si veda ad esempio il teorema IV.8.20 di [DS58]), ci dicono che l'insieme definito dalle condizioni

$$v \in \mathfrak{V}, \quad \int_0^\infty |v(s)|^q ds = 1, \quad K(v) \leq \text{costante}$$

è relativamente compatto rispetto alla topologia di $L^q(0, \infty)$ — il lemma 2.7 ci garantisce la limitatezza rispetto alla topologia di \mathfrak{V} , il lemma 2.6 fornisce invece una condizione sufficiente per la compattezza rispetto alla topologia di $L^q(0, \infty)$.

Il lemma 2.8 implica che K è semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia di $L^q(0, \infty)$.

Ne deduciamo che l'insieme menzionato sopra è compatto nella topologia di $L^q(0, \infty)$, e che la restrizione di K a tale insieme ammette minimo.

Dato che J è positivo e omogeneo di grado zero e

$$J(v) = K(v) \times \left\{ \int_0^\infty |v(s)|^q ds \right\}^{-2/q},$$

l'enunciato è dimostrato. \square

5.2. La funzione v soddisfa l'equazione differenziale seguente

$$\frac{d}{ds} (s(s + 4\pi)v'(s)) + Rv(s) + J(v) \cdot |v(s)|^{q-2} \cdot v(s) = 0 \quad (2.71)$$

per $0 < s < \infty$, e le seguenti condizioni al contorno

$$s(s + 4\pi)v'(s) \rightarrow 0 \text{ as } s \rightarrow 0. \quad (2.72)$$

Dimostrazione. Il differenziale di Gateaux J' di J , è l'applicazione da \mathfrak{V} nel duale appropriato di \mathfrak{V} data da

$$J'(v)(\varphi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [J(v + t\varphi) - J(v)]$$

per ogni φ in \mathfrak{V} . Se v appartiene a \mathfrak{V} e soddisfa la (2.69), si verifica che

$$\frac{1}{2} J'(v)(\varphi) = \int_0^\infty s(s + 4\pi)v'\varphi' ds - R \int_0^\infty v\varphi ds - J(v) \int_0^\infty |v|^{q-2} v\varphi ds$$

per ogni φ in \mathfrak{V} . Il comportamento asintotico di $v(s)$ per $s \rightarrow 0$ o per $s \rightarrow \infty$ è chiarito dalla (2.63) (lemma 2.62). Quindi, integrando per parti,

$$\frac{1}{2} J'(v)(\varphi) = \int_0^\infty \left\{ s(s + 4\pi)v'(s) + R \int_0^s v(t) dt + J(v) \int_0^s |v(t)|^{q-2} v(t) dt \right\} \varphi'(s) ds$$

per ogni φ in \mathfrak{V} .

La proprietà (2.70) implica $J'(v) = 0$. Deduciamo che

$$s(s + 4\pi)v'(s) + R \int_0^s v(t) dt + J(v) \int_0^s |v(t)|^{q-2} v(t) dt = 0 \quad (2.73)$$

— modificando v su un insieme di misura zero, l'equazione (2.73) è soddisfatta per ogni s positivo.

L'equazione (2.73) implica sia la (2.71) che la (2.72) — e viceversa. \square

5.3. La funzione v soddisfa le seguenti condizioni al contorno

$$-4\pi v'(0) = Rv(0) + J(v) \cdot |v(0)|^{q-2} \cdot v(0). \quad (2.74)$$

Dimostrazione. Dall'equazione (2.73),

$$4\pi \int_0^\infty |v'(s)| ds \leq \int_0^\infty \log \left(1 + \frac{4\pi}{s} \right) \{R|v(s)| + J(v) \cdot |v(s)|^{q-1}\} ds.$$

In questa disuguaglianza è contenuta l'informazione seguente

$$\int_0^\infty |v'(s)| ds < \infty,$$

per via della formula (2.66) e del Lemma 2.5.

Ne deduciamo che v è continua fino a 0. Dividendo entrambi i membri della (2.73) per s , e facendo tendere s a zero otteniamo la (2.74).

5.4. La funzione v soddisfa

$$v(\infty) = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^\infty (sv'(s))^2 ds < \infty \quad (2.75)$$

banalmente — queste condizioni sono comprese nell'appartenenza a \mathfrak{B} .

5.5. L'affermazione (i) del lemma 2.3 ci permette di trasformare v in una funzione decrescente che minimizza J . In altre parole, possiamo supporre che v soddisfi tutte le proprietà elencate sopra e in più che sia decrescente.

Si osservi che v decresce strettamente ed è regolare. Infatti, una soluzione decrescente dell'equazione (2.71) o è costante oppure è strettamente decrescente; ogni soluzione positiva della (2.71) è derivabile infinite volte.

5.6. Sostituiamo v con

$$[J(v)]^{1/(q-2)} \times v \quad (2.76)$$

— in altre parole, normalizziamo v in modo che

$$\left\{ \int_0^\infty |v(s)|^q ds \right\}^{1-2/q} = J(v). \quad (2.77)$$

La normalizzata di v soddisfa le condizioni da (2.19) a (2.22). La condizione (2.23) si ottiene invece dalla (2.77) e dall'affermazione (ii) del lemma 2.3.

5.7. Applicando il lemma 2.2 la dimostrazione è conclusa. □

2.7 Dimostrazione del teorema 2.2

6.1. Una funzione che soddisfi l'equazione differenziale

$$\frac{d}{ds} (s(s + 4\pi)v'(s)) + |v(s)|^{q-2} \cdot v(s) = 0, \quad (2.78)$$

per $0 < s < \infty$, tende a zero all'infinito in modo che

$$v(\infty) = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^\infty (sv'(s))^2 ds < \infty, \quad (2.79)$$

e soddisfi le seguenti condizioni al bordo

$$-4\pi v'(0) = |v(0)|^{q-2} \cdot v(0) \quad (2.80)$$

è data da

$$v(s) = \left(1 + \frac{s}{4\pi}\right)^{-1} \quad \text{oppure} \quad v(s) = \sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{s}{2\pi}\right)^{-1}$$

nei casi in cui $q = 3$ o $q = 4$ rispettivamente.

Di conseguenza i risultati del teorema 2.2 si ottengono da quelli del teorema 2.1 e dall'affermazione seguente: se $q \leq 3 \leq \infty$, le condizioni (2.78), (2.79), (2.80), più la seguente

$$v'(s) < 0 \quad \text{per } 0 < s < \infty \quad (2.81)$$

identificano v *univocamente*.

I capoversi successivi sono propedeutici alla dimostrazione di questa affermazione.

6.2. Valgono le seguenti due affermazioni

- (i) Sia $3 \leq q < \infty$; se v soddisfa la (2.78) e la (2.79) allora, $s^2 v(s) \rightarrow 0$ as $s \rightarrow 0$.
- (ii) Sia $2 < q < \infty$; se v soddisfa la (2.78) e $sv'(s) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow 0$ allora vale la (2.80).

Dimostrazione della (i). L'equazione (2.78) ci dice che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t(t + 4\pi) \cdot v'(t) = s(s + 4\pi) \cdot v'(s) + \int_s^\infty |v(t)|^{q-2} v(t) dt$$

se s è positivo; la condizione (2.79) e i lemmi 2.4 e 2.7 implicano che

$$\int^\infty |v(t)|^{q-1} dt < \infty$$

se $q \geq 3$. □

Dimostrazione della (ii). Dalle ipotesi segue

$$-s(s + 4\pi) \cdot v'(s) = \int_0^s |v(t)|^{q-2} v(t) dt$$

per ogni s positivo, e $v(s) = o(\log(1/s))$ per $s \rightarrow 0$. La dimostrazione è esposta nel paragrafo 6.4. □

6.3. Se $q \geq 3$, il cambio di variabili definito da

$$s = \frac{4\pi}{e^{2t} - 1}, \quad t = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{4\pi}{s}\right), \quad v(s) = \lambda^{1/(q-2)} u(t)$$

trasforma l'insieme formato dalle (2.78), (2.79), (2.80) e (2.81) in quello formato dalle condizioni (2.82), (2.83), (2.84) e (2.85). In altre parole, il nostro scopo è diventato identificare una funzione u a valori reali, sufficientemente regolare, definita in $[0, \infty[$, ed un parametro λ tali che u e λ soddisfino l'equazione seguente

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(t) + \lambda (\sinh t)^{-2} |u(t)|^{q-2} u(t) = 0 \quad (2.82)$$

per $0 < t < \infty$, e tali che u soddisfi le condizioni

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{du}{dt}(0) = 1 \quad (2.83)$$

$$\frac{du}{dt}(\infty) = 0, \quad (2.84)$$

$$\frac{du}{dt}(t) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < t < \infty. \quad (2.85)$$

6.4. Se λ è positivo e $2 < q < \infty$, la generica soluzione di (2.82) e (2.83) ha le proprietà seguenti:

(i)
$$\left| \frac{du}{dt}(t) \right| \leq 1$$

e

$$|u(t)| \leq \min \left\{ t, \left(\frac{q}{2\lambda} \right)^{1/q} (\sinh t)^{2/q} \right\}$$

per ogni t non negativo.

(ii) u è asintoticamente lineare — più precisamente, esistono due costanti A e B tali che

$$\frac{du}{dt}(t) = A + \lambda \cdot O(t^{q-1}e^{-2t}) \quad \text{e} \quad u(t) = At + B + \lambda \cdot O(t^{q-1}e^{-2t})$$

per $t \rightarrow \infty$.

(iii) u ha infiniti zeri e infiniti punti di flesso.

(iv) u è concava se e solo se u non ha nessuno zero positivo.

(v) u è crescente se e solo se u non ha zeri positivi.

Dimostrazione di (i). Sia H definita da

$$H(t) = \left[\frac{du}{dt}(t) \right]^2 + (2\lambda/q) \cdot (\sinh t)^{-2} \cdot |u(t)|^q.$$

Dall'equazione (2.82)

$$\frac{dH}{dt}(t) = (2\lambda/q) \cdot |u(t)|^q \cdot \frac{d}{dt}(\sinh t)^{-2},$$

quindi

$$\frac{dH}{dt}(t) \leq 0$$

per ogni t positivo. Per le condizioni iniziali (2.83)

$$H(0+) = 1.$$

Ne deduciamo che

$$\left[\frac{du}{dt}(t) \right]^2 + (2\lambda/q) \cdot (\sinh t)^{-2} \cdot |u(t)|^q \leq 1$$

per ogni t positivo. Segue la proprietà (i). \square

Dimostrazione di (ii). Per l'equazione (2.82) più le condizioni iniziali (2.83),

$$\frac{du}{dt}(t) = 1 - \lambda \int_0^t (\sinh s)^{-2} |u(s)|^{q-2} u(s) ds.$$

Si ha quindi

$$\frac{du}{dt}(t) = 1 - \lambda \int_0^\infty (\sinh s)^{-2} |u(s)|^{q-2} u(s) ds + \text{un resto},$$

dove

$$|\text{resto}| \leq \lambda \int_t^\infty (\sinh s)^{-2} |u(s)|^{q-1} ds.$$

Segue la proprietà (ii), dato che dalla (i) $|u(t)| \leq t$. \square

Dimostrazione della (iii). L'equazione (2.82) più le condizioni iniziali (2.83) danno

$$\frac{du}{dt}(t) \geq 1 - \lambda \int_0^t |u(s)|^{q-1} (\sinh s)^{-2} ds.$$

Di conseguenza, per la proprietà (i),

$$\frac{du}{dt}(t) \geq 1 - \lambda \int_0^t s^{q-1} (\sinh s)^{-2} ds$$

e quindi

$$\frac{du}{dt}(t) \geq 1 - \frac{\lambda}{q-2} t^{q-2}$$

e

$$u(t) \geq t - \frac{\lambda}{(q-2)(q-1)} t^{q-1}.$$

Deduciamo che $u(t)$ cresce strettamente al crescere di t da 0 a $[(q-2)/\lambda]^{1/(q-2)}$ ed è strettamente positiva per $0 < t < [(q-2)(q-1)/\lambda]^{1/(q-2)}$ — in altre parole, u non ha zeri positivi né flessi in un intorno di 0.

Sia z definito da

$$z = \frac{du}{dt} \cdot \sinh t. \quad (2.86)$$

Per le equazioni (2.82) e (2.86) si ha

$$z \cdot \cosh t - (dz/dt) \cdot \sinh t = \lambda |u|^{q-2} u.$$

Eliminando u fra le ultime due equazioni si ha

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left\{ -1 + (q-1) \frac{\lambda^{1/(q-1)}}{(\sinh t)^2} \left| z \cdot \cosh t - \frac{dz}{dt} \cdot \sinh t \right|^{(q-2)/(q-1)} \right\} z = 0.$$

Di conseguenza z soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + [-1 + Q(t)] z = 0. \quad (2.87)$$

Qui

$$Q(t) = (q-1)\lambda(\sinh t)^{-2}|u(t)|^{q-2} \quad (2.88)$$

è un coefficiente che entrerà in gioco anche nel seguito — osserviamo che dalla proprietà (i) segue

$$0 \leq Q(t) \leq (q-1)\lambda(\sinh t)^{-2}t^{q-2}. \quad (2.89)$$

Poiché i coefficienti z nell'equazione (2.87) tendono a -1 abbastanza velocemente per $t \rightarrow \infty$, per il teorema di confronto di Sturm (si veda ad esempio [Tri61] paragrafo 20, [Swa68], capitolo 1) o utilizzando i teoremi standard sulle oscillazioni ([Swa68] capitolo 2) garantisce che l'equazione (2.87) è non oscillatoria, vale a dire gli zeri di z non si ripetono all'infinito. \square

H è definita da

$$H(t) = \left[\frac{du}{dt}(t) \cdot \sinh t \right]^2 + (2\lambda/q) \cdot |u(t)|^q,$$

quindi dall'equazione (2.82)

$$H'(t) = \left[\frac{du}{dt}(t) \right]^2 \cdot \frac{d}{dt}(\sinh t)^2$$

— in altre parole, H è una funzione crescente. Di conseguenza

$$|u(t_1)| < |u(t_2)| < |u(t_3)| < \dots$$

se $t_1, t_2, t_3 \dots$ sono i punti di flesso di u ordinati in ordine crescente — confrontati mediante il teorema di Sonin & Pòlya ([Tri61], paragrafo 19).

Le proprietà (iv) e (v) sono una conseguenza immediata di (2.82) e (2.83). \square

6.5. Supponiamo $2 < q < \infty$, ed esaminiamo come la soluzione u di (2.82) e (2.83) dipenda dal parametro λ .

Chiaramente, $u(t) \equiv t$ se $\lambda = 0$. D'altra parte, u è una funzione crescente di t per λ positivo e abbastanza piccolo — la disuguaglianza

$$\frac{du}{dt}(t) \geq 1 - \lambda \int_0^t s^{q-1}(\sinh s)^{-2} ds$$

(ricavata nei paragrafi precedenti) e la formula

$$\int_0^\infty s^{q-1}(\sinh s)^{-2} ds = 2^{2-q}\Gamma(q)\zeta(q-1)$$

(che compare in [GR65], paragrafo 3.527]) ci dice che $du(t)/dt$ è positiva per ogni t positivo se

$$0 \leq \lambda \leq \frac{2^{q-2}}{[\Gamma(q)\zeta(q-1)]}.$$

Sia $L = \partial u / \partial \lambda$, la derivata di u rispetto a λ . Un esame mostra che L è dato dalla formula seguente

$$(q-2)\lambda L = w - u, \quad (2.90)$$

dove w soddisfa

$$\frac{d^2 w}{dt^2}(t) + Q(t)w(t) = 0 \quad (2.91)$$

per $0 < t < \infty$ e

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw}{dt}(0) = 1. \quad (2.92)$$

Il coefficiente Q è definito come in (2.88). Le proprietà seguenti sono dedotte facilmente (2.89), (2.91) e (2.92):

- (i) $|w(t)| \leq (\text{Costante}) \cdot t$ per ogni t positivo;
- (ii) w è asintoticamente lineare, e $|w - (\text{asintoto})|$ tende a 0 esponenzialmente per t che tende a ∞ ;
- (iii) w ha un numero finito di zeri e un numero finito di flessi.

Lemma 2.9 *Supponiamo che v soddisfi le (2.82), (2.83), e che w soddisfi (2.91) e (2.92). Allora $w(t) < u(t)$ per t positivo e non supera il valore del primo zero di w .*

Dimostrazione. L'equazione (2.82) significa $d^2 u/dt^2 + P(t)u = 0$, dove $(q-1) \cdot P(t) = Q(t)$. D'altra parte u e w soddisfano le stesse condizioni iniziali. Per il teorema di confronto che compare in [Tri61] paragrafo 20 o per il teorema di confronto di Levin — si veda [Swa68], capitolo 1, paragrafo 7 — porta alla conclusione. \square

Lemma 2.10 *Supponiamo che u soddisfi (2.82), (2.83) e (2.85). Allora la soluzione w della (2.91) e (2.92) ha al più uno zero positivo.*

Sebbene non ne sia stata data una dimostrazione formale, la verità del Lemma 2.10 può essere dedotta ragionevolmente dai fatti seguenti:

- (i) Supponiamo che u soddisfi le (2.82), (2.83) e (2.85). Allora la soluzione delle (2.91) e della (2.92) non può avere più di due zeri distinti contenuti nell'insieme

$$\{t > 0 : t \cdot \coth t \geq q/2\}. \quad (2.93)$$

(Osserviamo che $t \cdot \coth t$ è convessa e strettamente crescente da 1 a ∞ per t crescente da 0 a ∞ . La radice di $t \cdot \coth t = q/2$ è 1.287839 per $q = 3$, è 1.915008 per $q = 4$, è sempre minore di $q/2$ e vi tende asintoticamente per q grande.)

- (ii) Supponiamo che u soddisfi la (2.82) e la (2.83), supponiamo che w soddisfi (2.91) e (2.92), e siano a, b tali che $0 \leq a < b$, $w(a) = w(b) = 0$, e $w(x) \neq 0$ per $a < x < b$. Allora

$$\lambda b^{q-3}(b-a) \geq \frac{q-2}{q-1}. \quad (2.94)$$

- (iii) Supponiamo siano assegnati q, λ ed un intorno di 0. Allora $u(t)$ e $w(t)$ possono essere calcolati con precisione arbitraria per ogni t nell'intorno assegnato. Test numerici mostrano che w ha al più uno zero fin tanto che rimane positiva.

Dimostrazione della (i). Sia u la generica soluzione di (2.82), e sia

$$z(t) = u(t) - t \cdot u'(t), \quad (2.95)$$

l'altezza sopra l'origine della retta tangente al grafico di u in $(t, u(t))$. Dalle equazioni (2.82) e (2.95) si ha

$$t^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{t} \right) + z = 0, \quad \frac{dz}{dt} = \lambda t (\sinh t)^{-2} |u|^{q-2} u.$$

Eliminando la u dalle ultime due equazioni si ha

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(2 \coth t - \frac{q}{t}\right) \frac{dz}{dt} + (q-1)\lambda^{1/(q-1)}(\sinh t)^{-2/(q-1)} \left| \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} \right|^{(q-2)/(q-1)} z = 0. \quad (2.96)$$

In altri termini, si ha

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(2 \coth t - \frac{q}{t}\right) \frac{dz}{dt} + Q(t)z = 0, \quad (2.97)$$

dove Q è definita dalla (2.88).

Supponiamo che u soddisfi anche la (2.83) e la (2.85). Allora u si annulla in 0 ed è concava, quindi

$$z(t) > 0 \text{ e } \frac{dz}{dt}(t) > 0 \quad (2.98)$$

per ogni t positivo. Di conseguenza, l'equazione (2.97) è della forma

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left[Q(t) + \left(t \cdot \coth t - \frac{q}{2}\right) \times (\text{un coefficiente positivo})\right] z = 0. \quad (2.99)$$

Le equazioni (2.91) e (2.99), la disuguaglianza (2.98) e il teorema di confronto di Sturm portano alla conclusione. \square

Dimostrazione di (ii). L'affermazione (ii) segue da una variante del teorema di De la Vallée-Poussin — [Tri61], paragrafo 17. Si verifica facilmente che se a, b e w soddisfano

$$0 \leq a < b, \quad w(a) = w(b) = 0, \quad \text{e } w(x) \neq 0 \text{ per } a < x < b$$

allora

$$\int_a^b t \left| \frac{1}{w(t)} \frac{d^2 w}{dt^2}(t) \right| dt \geq \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{a})^2}{b-a}. \quad (2.100)$$

Quindi si ha

$$\int_a^b t Q(t) dt \geq \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{a})^2}{b-a}.$$

Poiché la disuguaglianza (2.89) implica

$$Q(t) \leq (q-1)\lambda t^{q-4},$$

segue la tesi. \square

6.6. L'equazione (2.90) ed i lemmi 2.9 e 2.10 ci dicono che

$$L(t) < 0$$

per ogni t positivo se u soddisfa (2.82), (2.83) e (2.85). In altre parole, la soluzione u delle (2.82) e (2.83) è sempre decrescente rispetto a λ fin tanto che u è crescente rispetto a t .

Questo implica che la soluzione di (2.82), (2.83), (2.84) e (2.85) è unica, e questo conclude la dimostrazione. \square

Capitolo 3

Calcolo numerico delle costanti

3.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti sono stati stabiliti i valori di $C(p, q, R)$ in alcuni casi:

$$C(p, q, R) = p^{-2}$$

per $1 \leq p < \infty$, $q = p$ e $R = 0$;

$$C(p, q, R) = 4\pi$$

per $p = 1$, $q = 2$ e $-\infty < R \leq 1$;

$$C(p, q, R) = \left(\frac{4\pi}{q}\right)^2 \left(\frac{q}{2} - 1\right)^{2/q} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{q}\right)\right]^{-1}$$

per $1 < p < 2$, $q = 2p/(2-p)$ e $-\infty < R \leq p^{-2}$;

$$C(p, q, R) = (4\pi)^{2/p} \left[\Gamma\left(\frac{p}{2(p-1)}\right)\right]^{2-2/p} \left[\Gamma\left(\frac{p-2}{2(p-1)}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p-1}\right)\right]^{2/p-2}$$

per $2 < p < \infty$, $q = \infty$ e $R = 0$.

In particolare, $C(2, q, -3/4) = A^{-2}$ dove A è la costante ottimale che compare nella disuguaglianza di L.E.Fraenkel [Fra92] (1.12). In questo capitolo ci occuperemo del calcolo numerico della costante $C(2, q, R)$ per $q > 2$ e $R < 1/4$.

Nel paragrafo 2.6 è stato dimostrato il risultato seguente:

Teorema 3.1 *Sia $2 < q < \infty$ e $-\infty < R < 1/4$. Allora*

$$C(2, q, R) = \left\{ \int_0^\infty |v(s)|^q ds \right\}^{1-2/q}, \quad (3.1)$$

dove v è la funzione a valori positivi, definita in $[0, \infty[$ strettamente decrescente, soddisfacente l'equazione

$$\frac{d}{ds} (s(s+4\pi)v'(s)) + Rv(s) + v(s)^{q-1} = 0 \quad (3.2)$$

per $0 < s < \infty$ e le condizioni al contorno

$$-4\pi v'(0) = Rv(0) + v(0)^{q-1}, \quad v(\infty) = 0. \quad (3.3)$$

Il calcolo di $C(2, q, R)$ è quindi ricondotto all'integrazione di (3.2)(3.3) e al calcolo del secondo membro della (3.1).

Cambiamo variabile nella (3.2): siano

$$s = \frac{4\pi}{e^{2t} - 1}, \quad t = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{4\pi}{s} \right), \quad u(t) = v \left(\frac{4\pi}{e^{2t} - 1} \right);$$

l'equazione diventa:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{u}{(\sinh t)^2} (R + |u|^{q-2}) = 0.$$

Se $2 < q < \infty$, $\lim_{s \rightarrow 0} s v'(s) = 0$, dalle (3.3) abbiamo

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dt} (+\infty) = 0.$$

L'algoritmo risolutivo consiste nella soluzione del nuovo problema ai limiti utilizzando un metodo alle differenze e nel successivo calcolo della costante $C(2, q, R)$ mediante valutazione della

$$C(2, q, R) = \left\{ \int_0^\infty \frac{|u(t)|^q}{\sinh^2(t)} dt \right\}^{1-2/q}, \quad (3.4)$$

ottenuta dalla (3.1) mediante un cambio di variabile, utilizzando una formula di quadratura di ordine opportuno.

3.2 Metodi alle differenze finite

Un metodo alle differenze finite ([AMR88], [Lam73]) è un algoritmo che dato un problema ai limiti (o ai valori iniziali) ne fornisce una soluzione approssimata. Si compone essenzialmente di 3 parti:

- 1) Scelta di una rete di punti $\Gamma : a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$. La soluzione approssimata consisterà in approssimazioni u_i dei valori $u(x_i)$ della funzione $u(x)$, soluzione del problema nel continuo, valutata sui punti della griglia.
- 2) Costruzione di un sistema di equazioni algebriche per la soluzione approssimata ottenuto sostituendo le derivate con differenze divise sia nell'equazione differenziale che nelle condizioni ai limiti soddisfatti dalla soluzione esatta.
- 3) Soluzione del sistema così ottenuto rispetto ai valori della soluzione approssimata. La soluzione fornisce un insieme di valori $u_i = u_\Gamma(x_i)$ che all'occorrenza possono essere usati per costruire u_Γ per ogni $x \in [a, b]$ mediante interpolazione.

Esempio 3.1 Consideriamo il problema ai limiti

$$\begin{cases} u'' + p(x)u' + r(x)u = q(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = \beta_1 \\ u(1) = \beta_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

dove p, q, r sono funzioni continue in $[0, 1]$.

Consideriamo una griglia uniforme di punti $\Gamma : x_i = (i-1)/h, \quad i = 1, \dots, N+1$ dove $h = 1/N$. Determineremo la funzione $u_\Gamma = \{u_j\}_{j=1, \dots, N+1}$ tale che $u_i \simeq u(x_i), i = 1, \dots, N+1$ dove $u(x)$ è la soluzione esatta del problema.

Dallo sviluppo in serie di Taylor di u si ha:

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i + ih) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + O(h^4) \\ u(x_{i-1}) &= u(x_i - ih) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + O(h^4) \end{aligned}$$

Troncando al termine del secondo ordine e sottraendo membro a membro ricaviamo un'espressione per la derivata prima:

$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2);$$

Analogamente, troncando al terzo ordine e sommando membro a membro,

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2).$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione differenziale (3.5) possiamo sostituire l'equazione differenziale nel punto x_i con

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h} + r(x_i)u_i = q(x_i), \quad 2 \leq i \leq N$$

Inoltre, dalle condizioni ai limiti, $u_1 = \beta_1, u_2 = \beta_2$. Moltiplicando le equazioni nei punti interni della griglia per h^2 e riordinandole si giunge al sistema:

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & b_N & a_N & c_N & \\ & & & & b_{N+1} & a_{N+1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \\ u_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \\ d_{N+1} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

dove

$$a_1 = 1, \quad a_i = -2 + h^2 r(x_i), \quad i = 2, \dots, N \quad a_{N+1} = 1 \quad (3.7)$$

$$b_i = 1 - \frac{h}{2} p(x_i), \quad i = 2, \dots, N \quad b_{N+1} = 0 \quad (3.8)$$

$$c_1 = 0, \quad c_i = 1 + \frac{h}{2} p(x_i), \quad i = 2, \dots, N \quad (3.9)$$

$$d_1 = \beta_1 \quad d_i = h^2 q(x_i) \quad i = 2, \dots, N \quad d_{N+1} = \beta_{N+1} \quad (3.10)$$

□

In generale gli schemi alle differenze portano a considerare sistemi di equazioni algebriche che coinvolgono matrici con struttura a banda (tridiagonale nel caso dell'esempio). L'eliminazione di Gauss [GL83] è particolarmente efficiente per matrici di questo tipo, in modo particolare se la matrice $\{a_{ij}\}$ è a *diagonale dominante* (cioè $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$).

Per valutare la bontà di $\{u_i\}$ come approssimazione di $u(x)$ possiamo valutare quanto bene quest'ultima soddisfa il sistema (3.6).

Siano:

$$\mathbf{L}(u)(x) = u'' - p(x)u' - r(x)u(x) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{L}_\Gamma(u)(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + p(x)\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + r(x)u(x) \quad (3.12)$$

Sia $v(x)$ una funzione regolare, l'errore locale di troncamento è definito da:

$$\tau_i[v] = \mathbf{L}_\Gamma v(x_i) - \mathbf{L}v(x_i) \quad 2 \leq i \leq N.$$

Se $v \in C^4[0, 1]$, dalla definizione,

$$\tau[v] = \max_{2 \leq i \leq N} |\tau_i[v]| \leq ch^2.$$

$\tau[v] \rightarrow 0$ come h^2 : il nostro metodo è di ordine 2.

Un metodo alle differenze si dice *consistente* se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau[v] = 0$$

La consistenza è necessaria ma non sufficiente per la convergenza discreta di un metodo alle differenze (cioè perché si abbia $u_i \rightarrow u(x_i)$ per $h \rightarrow 0$). La consistenza garantisce che l'operatore alle differenze sia vicino all'operatore differenziale; la stabilità delle soluzioni in aggiunta alla consistenza implica la convergenza del metodo.

Nel caso dell'esempio, essendo l'equazione lineare, la stabilità corrisponde al buon condizionamento della matrice del sistema. Se $h \leq \frac{2}{\sup|p|}$ ed $r < \varepsilon < 0$ la matrice è a diagonale dominante e questo garantisce il buon condizionamento della matrice.

In generale, consistenza del metodo + stabilità delle soluzioni (almeno per h piccolo) garantiscono la convergenza ([AMR88], §5.2).

3.3 Metodi alle differenze per le equazioni non lineari

Consideriamo un generico problema non lineare del primo ordine, formato da n equazioni e da una condizione ai limiti:

$$u'(x) = f(x, u), \quad a < x < b \quad (3.13)$$

$$g(u(a), u(b)) = 0, \quad (3.14)$$

dove $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ e $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$; perché il problema abbia soluzione è necessario che g soddisfi opportune condizioni di compatibilità con l'equazione (3.13). Per l'approssimazione numerica consideriamo una griglia Γ di punti; indichiamo con u_Γ il vettore dei valori della soluzione approssimata.

Integrando con la regola del *midpoint*, otteniamo lo schema

$$u_{i+1} - u_i = \frac{h_i}{2} f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \frac{u_{i+1} + u_i}{2}\right), \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.15)$$

$$g(u_1, u_{N+1}) = 0. \quad (3.16)$$

In entrambi i casi abbiamo un sistema di $n(N+1)$ equazioni algebriche, in generale non lineari, nelle $n(N+1)$ incognite u_Γ .

Il sistema può essere risolto utilizzando il metodo di Newton. Quest'ultimo è un metodo iterativo di punto fisso basato sulla formula

$$s^{m+1} = G(s^m), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

dove

$$G(s) = s - [\nabla F(s)]^{-1}F(s)$$

$\nabla F(s)$ è la matrice jacobiana del sistema non lineare da risolvere. Ad ogni iterazione risolviamo il sistema lineare:

$$[\nabla F(s)]\xi = F(s)$$

dove

$$\xi = s^{m+1} - s^m$$

3.4 Costruzione del problema discreto

Vogliamo risolvere numericamente il problema:

$$\begin{cases} u'' + \frac{Ru + u|u|^{q-2}}{\sinh^2(t)} = 0, & t \in [0, +\infty] \\ u(0) = 0 \\ u'(+\infty) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Da uno studio qualitativo delle soluzioni del problema (3.17) sappiamo che $u'' = o(e^{-2t})$ per $t \rightarrow \infty$, quindi $u' = o(e^{-2t})$ per $t \rightarrow \infty$. Consideriamo il problema "troncato" nell'intervallo $[0, T]$:

$$\begin{cases} u_T'' + \frac{Ru_T + u_T|u_T|^{q-2}}{\sinh^2(t)} = 0, & t \in [0, T] \\ u_T(0) = 0 \\ u_T'(T) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Sia

$$v(t) = \begin{cases} u_T(t), & t \in [0, T] \\ u_T(T), & t > T. \end{cases}$$

Per la soluzione del problema (3.18) utilizzeremo un metodo alle differenze. Trasformeremo innanzitutto l'equazione in un sistema di 2 equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} u_{T,1}' = u_{T,2} \\ u_{T,2}' = -\frac{Ru_T + u_T|u_T|^{q-2}}{\sinh^2(t)} = 0 \\ u_{T,1}(0) = 0 \\ u_{T,2}(T) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

e risolveremo quest'ultimo utilizzando un metodo alle differenze del secondo ordine basato sulla formula del midpoint. Fissata una tolleranza ε , sceglieremo il valore di T in modo che $|u'_{T,2}| < \varepsilon$; osserviamo che, dalla (3.17), $u(t) < t^{1/2+\sqrt{1/4-R}}$ definitivamente e quindi,

$$|u''(t)| < \left| \frac{Rt^{1/2+\sqrt{1/4-R}} + t^{(q-2)(1/2+\sqrt{1/4-R})}}{\sinh^2 t} \right|.$$

Il valore di T sarà quindi dell'ordine di grandezza di $-\log(\varepsilon)$.

Sia N il numero di suddivisioni dell'intervallo $[0, T]$. In base allo schema scelto, il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} u_{1,1} = 0 \\ u_{i+1,1} - u_{i,1} - \frac{h}{2}(u_{i+1,2} + u_{i,2}) = 0 & i = 1, \dots, N \\ u_{i+1,2} - u_{i,2} - hg\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \frac{u_{i+1,2} + u_{i,2}}{2}\right) = 0 & i = 1, \dots, N-1 \\ u_{N+1,2} = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Sia G_j , $j = 1, \dots, 2(N+1)$ la generica equazione del sistema.

$$\frac{\partial G_{2i}}{\partial u_{i,1}} = -1 \quad \frac{\partial G_{2i+1}}{\partial u_{i,1}} = -\frac{h}{2} \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \frac{u_{i+1,2} + u_{i,2}}{2} \right) \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial G_{2i}}{\partial u_{i,2}} = -\frac{h}{2} \quad \frac{\partial G_{2i+1}}{\partial u_{i,2}} = -1 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial G_{2i}}{\partial u_{i+1,1}} = 1 \quad \frac{\partial G_{2i+1}}{\partial u_{i+1,1}} = -\frac{h}{2} \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \frac{u_{i+1,2} + u_{i,2}}{2} \right) \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial G_{2i}}{\partial u_{i+1,2}} = -\frac{h}{2} \quad \frac{\partial G_{2i+1}}{\partial u_{i+1,2}} = -1 \quad (3.24)$$

dove $g(t, u) = (Ru + u|u|^{q-2})/\sinh^2(t)$.

La matrice jacobiana è a banda con ampiezze superiore e inferiore uguali a 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{h}{2} & 1 & -\frac{h}{2} \\ g_1 & -1 & g_1 & -1 \\ & & -1 & -\frac{h}{2} & 1 & -\frac{h}{2} \\ & & g_2 & -1 & g_2 & -1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & -1 & -\frac{h}{2} & 1 & -\frac{h}{2} \\ & & & & & g_N & -1 & g_N & -1 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

e

$$g_i = \frac{\partial g}{\partial u} \left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \frac{u_i + u_{i+1}}{2} \right).$$

Per semplicità utilizzeremo una griglia di punti uniforme quindi il passo h di discretizzazione sarà T/N , dove come valore di T fissiamo

$$T \simeq -\log(\varepsilon)/2. \quad (3.26)$$

Il metodo del midpoint è del secondo ordine ovvero l'errore locale di troncamento è dell'ordine di grandezza di h^2 ; perché esso sia minore della tolleranza ε dovrà essere $\varepsilon > T/N^2$. Da quest'ultima e dalla (3.26) ricaviamo un legame tra la tolleranza e il numero di punti della griglia necessari per ottenerla:

$$\varepsilon > \frac{1}{1 + 2N^2} \quad \text{ovvero} \quad N > \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon}}.$$

Ad esempio con una griglia di 250000 punti si hanno errori locali di troncamento dell'ordine di 10^{-10} e $T \simeq 10$. Il valore di $C(2, q, R)$ viene poi determinato in base alla (3.2). Utilizzeremo ancora la formula del midpoint per la quadratura e la stessa griglia di punti. L'errore globale nel calcolo di $C(2, q, R)$ è $\simeq \varepsilon h^2 T \simeq h = T/N$. Per $N=250000$ l'errore sarà dell'ordine di 10^{-4} .

3.5 Implementazione del metodo

Il codice si compone di un programma principale e sei sottoprogrammi: DTSUPB e DTINFB per la risoluzione di sistemi triangolari superiori e inferiori rispettivamente con struttura a banda, DNPIVB per il calcolo della fattorizzazione LR (si vedano [GL83], [CB72] e [FP82]) di una matrice con struttura a banda, DNWETO per la soluzione di sistemi non lineari con matrice jacobiana a banda, DF e DJAC che valutano la funzione da annullare e la sua jacobiana rispettivamente. Tutti i sottoprogrammi sono realizzati utilizzando la precisione doppia.

La matrice jacobiana è memorizzata per diagonali nelle variabili D, L, R che contengono diagonale, parte triangolare inferiore e parte triangolare superiore rispettivamente secondo lo schema seguente (con riferimento alla matrice (3.25)):

$$\begin{aligned} D &= (1 \quad -h/2 \quad w_1 \quad -h/2 \quad w_2 \quad \dots \quad -h/2 \quad w_N \quad 1)^T \\ L &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & * \\ w_1 & 0 & w_2 & 0 & \dots & w_N & 0 & * & * \end{pmatrix}^T \\ R &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & * \\ 0 & -h/2 & 0 & -h/2 & 0 & \dots & -h/2 & * & * \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

Le matrici D, L, R hanno n righe ma non sono completamente occupate da elementi della matrice jacobiana: le posizioni contrassegnate da * restano infatti inutilizzate.

PROGRAMMA PRINCIPALE

```

program bvm
*****
*   VARIABILI UTILIZZATE                               *
*   rr      Valore del parametro R in C(2,q,R).       *
*   q       Valore del parametro q in C(2,q,R).       *
*   n       Numero di punti della griglia.           *
*   nmax    Numero massimo di punti della griglia.    *
*   t       Valore di T                               *
*   h       Passo di discretizzazione.                *
*   sh      Vettore contenente i valori di 1/(2sinh(ih))^2 *
*   l       Sottodiagonali della matrice jacobiana.   *
*   r       Sopradiagonali della matrice jacobiana.   *
*   d       Diagonale della matrice jacobiana.        *
*   lb,rb   Ampiezze di banda di l,r rispettivamente. *
*   y       Valori di y(t_i) e di y'(t_i).           *
*   x       Valore di f(y).                           *
*   toll    Tolleranza.                               *
*   ind     Indicatore dell'esito di dnewto.          *
*   nome    Nome del file dove memorizzare i dati.    *
*   segno   Logica. Per il test sul segno della soluzione. *
*****
integer lb,rb,nmax
double precision h,q,rr,t,sh
common h,q,rr,t,sh(nmax)
integer n,i,ind,miter
double precision l(nmax,lb),r(nmax,rb),d(nmax),y(nmax,2)
double precision toll,x(2*nmax),c
parameter (nmax=500000,rb=2,lb=2,pi=3.1415927)
character*20 nome
logical segno
write(6,111)'# Numero punti griglia (max 250000):'
read(*,*) n
write(6,112)'# R='
read(*,*) rr
write(6,112)'# q='
read(*,*) qq
write(6,*)'Output file (max 20 chrs):'
read(*,*) nome
*****
*   toll = 10/(N^2)                                    *
*****
toll=1.0d1/N/N
*****
*   t scelto in modo che sinh(t)^(-2)<toll per s>t.     *
*****
t=-log(toll)/2.0d0
write(6,114)'# Equazione risolta tra 0 e ',t
miter=15

```

```

*****
*   Determina il passo di discretizzazione h   *
*****
      h=t/(n-1.0d0)
*****
*   Inizializza la matrice dei valori di sinh(t_i)^2   *
*****
      do 10 i=1,n
          sh(i)=2.0d0*sinh((2.0d0*i-1.0d0)*h/2.0d0)**2
10      continue
          q=3.0d0
*****
*   Definisce i valori iniziali di y per il metodo di   *
*   Newton.   *
*****
      do 15 i=1,n
          if ((i*h).lt.sqrt(q-2)) then
              y(i,1)=i*h
              y(i,2)=1.0d0
          else
              y(i,1)=sqrt(q-2)
              y(i,2)=0.0d0
          endif
15      continue
*****
*   Tutto e pronto per la soluzione.   *
*   Cicli iniziali per determinare il punto di partenza.   *
*****
      if (qq.gt.q) then
          passo=0.05d0
      else
          passo=-0.05d0
      endif
      do 40 q=3,qq,passo
          write(*,*)'Sto calcolando per q=',q
          call dnewto(l,r,d,n,lb,rb,y,ind,toll,miter,x,nmax)
          miter=30
40      continue
*****
*   Soluzione vera e propria.   *
*****
      q=qq
      write(*,*)'Sto calcolando per q=',q
      call dnewto(l,r,d,n,lb,rb,y,ind,toll,miter,x,nmax)
      if (ind.eq.0)
1      write(6,115)'# Problema risolto correttamente in ',miter,
2          ' iterazioni.'
      if (ind.eq.1)
1      write(6,116)'# Numero massimo di iterazioni insufficiente'
      if (ind.eq.2)
1      write(6,117)'# Problema risolto. Convergenza lenta.'

```

```

write(6,*)
*****
*   Test di positività della soluzione ottenuta   *
*****
    segno=.true.
    do 50 i=2,n
        segno=segno.and.((y(100,1)*y(i,1)).gt.0.0)
50    continue
        if (.not.segno) then
            write(*,*)'Soluzione oscillante non accettabile'
            stop
        endif
*****
*   Stampa il valore di |f(x)|.                   *
*****
    call df(y,n,x,nmax)
    c=0.0d0
    do 50 i=1,n
50    c=c+abs(x(2*i-1))
        write(6,118)'# Valore di f: ',c
*****
*   Calcola la costante ottimale integrando      *
*    $y(t)^q/\sinh(t)^2$  tra 0 e t.                *
*****
    c=abs(y(1,1))*q/sh(1)
    do 60 i=1,n-1
60    c=c+2.0d0*abs(y(i,1))*q/sh(i)
        c=(2*pi*((c+abs(y(n,1))*q/sh(N))*h))*(1.0d0-2.0d0/q)
        write(6,119)'# Costante C(2,' ,q',' ,',rr,')=' ,c
*****
*   Scrive la soluzione del BVP nel file nome.    *
*   Output in formato leggibile da Gnuplot.      *
*   A causa della gran mole di dati sono copiati nel file *
*   soltanto un valore ogni 200.                 *
*****
    if (nome.ne.'no') then
        open(unit=5,file=nome)
        write(5,120)'# r=' ,rr,' q=' ,q
        write(5,118)'# Valore di f: ',c
        write(5,119)'# Costante C(2,' ,q',' ,',rr,')=' ,c
        do 70 i=1,n,200
70    write(5,121)(2.0d0*i-1.0d0)*h/2.0d0,' ',abs(y(i,1))
        close(unit=5)
    endif
111 format(A37)
112 format(A4)
113 format(A23)
114 format(A28,F7.3)
115 format(A26,I2,A12)
116 format(A44)
117 format(A28)

```



```

118     format(A15,F7.3)
119     format(A14,F7.3,A,F7.3,A2,F9.5)
120     format(2(A4,F7.3))
121     format(E11.5,A1,E11.5)

```

DTSUPB

```

          subroutine dtsupb(r,d,b,n,nmax,ind,toll,rb)
*****
*   Risolve un sistema triangolare superiore di ordine N con matrice *
*   a banda di ampiezza RB. R contiene la parte sopradiagonale della *
*   matrice, memorizzata per diagonali.                               *
*   D contiene gli elementi diagonali della matrice e B il termine  *
*   noto. La soluzione e' sovrascritta al termine noto.             *
*                                                                      *
*   VARIABILI IN INGRESSO                                           *
*   R(NMAX,RB) Matrice del sistema. La I-esima colonna di R        *
*               contiene la I-esima sopradiagonale della matrice.  *
*   D(NMAX)    Diagonale della matrice.                             *
*   B(NMAX)    Termine noto del sistema.                            *
*   N          Ordine del sistema.                                   *
*   NMAX       Numero delle righe di R nell'unita' chiamante.     *
*   TOLL       Tolleranza per gli elementi diagonali.              *
*   RB         Ampiezza di banda superiore.                         *
*                                                                      *
*   VARIABILI IN USCITA                                             *
*   B(NMAX)    Soluzione del sistema.                               *
*   IND        Indice della validita' della soluzione del sistema. *
*               Se IND=0 soluzione calcolata correttamente.         *
*               Se IND>0 ABS(R(IND,IND))<TOLL.                     *
*               Se IND<0 R(-IND,-IND)=0.                            *
*****
          common h,q,rr,t,sh
          double precision r(nmax,*),b(*),d(*),sh(500000)
          double precision toll,h,q,t,rr
          integer i,ind,j,n,nmax,rb
          ind=0
          do 20 i=n-1,1,-1
            if (d(i).eq.0.0d0) then
              ind=-i
              return
            endif
            if (abs(d(i)).lt.toll) ind=i
            do 10 j=i+1,min(n,i+rb)
              b(i)=b(i)-r(i,j-i)*b(j)
10          continue
            b(i)=b(i)/d(i)
20          continue
          return
          end

```

DTINFB

```

subroutine dtinfb(l,b,n,nmax,lb)
*****
*   Risolve un sistema triangolare inferiore di ordine N con      *
*   elementi diagonali unitari e matrice a banda di ampiezza LB. *
*   L contiene la parte sottodiagonale della matrice, memorizzata *
*   per diagonali; B contiene il termine noto del sistema al quale *
*   viene sovrascritta la soluzione del sistema.                  *
*                                                                    *
*   VARIABILI IN INGRESSO                                          *
*   L(NR,LB) Matrice del sistema. La I-esima colonna contiene la  *
*             I-esima sottodiagonale della matrice.              *
*   B(NR)    Termine noto.                                         *
*   N        Ordine del sistema.                                    *
*   NMAX     Numero di righe di L nell'unita' chiamante.         *
*   LB       Ampiezza di banda inferiore.                          *
*                                                                    *
*   VARIABILI IN USCITA                                           *
*   B(NR)    Contiene il vettore soluzione.                        *
*****
      common h,q,rr,t,sh
      double precision l(nmax,*),b(*),sh(500000)
      double precision h,q,rr,t
      integer i,j,n,nmax
      do 20 i=1,n
        do 10 j=max(1,i-lb),i-1
          b(i)=b(i)-l(j,i-j)*b(j)
10      continue
20      continue
      return
      end

```

DNPIVB

```

subroutine dnpivb(l,r,d,b,n,lb,rb,nmax,ind,toll)
*****
*   Risolve il sistema Ax=b con il metodo di eliminazione di    *
*   Gauss senza pivoting. D contiene gli elementi diagonali della *
*   matrice, L la parte sottodiagonale, R la parte sopradiagonale, *
*   queste ultime due memorizzate per diagonali. TOLL e' la      *
*   tolleranza per gli elementi pivot. La variabile IND indica le *
*   condizioni di uscita dal sottoprogramma.                    *
*                                                                    *
*   VARIABILI IN INGRESSO                                          *
*   L,D,R     Contengono la matrice del sistema: D=diagonale,    *
*             L,R bande inferiore e superiore.                   *
*   B         Termine noto.                                       *
*   N         Ordine del sistema.                                  *
*   NMAX      Numero di righe di L ed R nell'unita' chiamante.  *
*****

```

```

*      TOLL      Tolleranza.
*      LB        Ampiezza di banda inferiore.
*      RB        Ampiezza di banda superiore.
*
*      VARIABILI IN USCITA
*      L,R       Contengono, nelle prime LB,RB colonne rispettivamente
*                la fattorizzazione LR della matrice data in
*                ingresso.
*      B         Contiene la soluzione del sistema.
*      IND       Indice della qualita' della soluzione.
*                IND=0: soluzione calcolata accuratamente.
*                IND>0: ABS(D(IND))<TOLL.
*                IND<0: D(-IND)=0. Fattorizzazione non completata.
*
*      SOTTOPROGRAMMI CHIAMATI
*      DTINFB    Risolve sistemi triangolari inferiori con diagonale
*                unitaria.
*      DTSUPB    Risolve sistemi triangolari superiori.
*****
double precision l(nmax,*),r(nmax,*),d(*),b(*),sh(500000)
double precision toll,h,q,rr,t
common h,q,rr,t,sh
integer i,ind,j,k,n,nmax,lb,rb
ind=0
do 30 k=1,n-1
  if (d(k).eq.0.0do) then
    ind=-k
    return
  endif
  do 20 i=k+1,min(n,k+lb)
    l(k,i-k)=l(k,i-k)/d(k)
    do 10 j=k+1,min(n,k+rb)
      if (i.gt.j) then
        l(j,i-j)=l(j,i-j)-l(k,i-k)*r(k,j-k)
      else if (i.lt.j) then
        r(i,j-i)=r(i,j-i)-l(k,i-k)*r(k,j-k)
      else
        d(i)=d(i)-l(k,i-k)*r(k,j-k)
      endif
    endif
  10 continue
  20 continue
  30 continue
call dtinfb(l,b,n,nmax,lb)
call dtsupb(r,d,b,n,nmax,ind,toll,rb)
return
end

```

DNEWTO

```

subroutine dnewto(l,r,d,n,lb,rb,y,ind,toll,miter,x,nmax)
*****
*
*   Risolve un sistema non lineare f(y)=0 di 2n equazioni in
*   2n incognite linearizzando secondo il metodo di Newton.
*
*   VARIABILI IN INGRESSO
*   y(n)   Punto di partenza per il metodo di Newton.
*   lb,rb  Ampiezze di banda inf. e sup. del sistema.
*   n      Semiordine del sistema.
*   toll   Tolleranza usata per i criteri di arresto.
*   miter  Numero massimo di iterazioni da eseguire.
*
*   VARIABILI IN USCITA
*   y(n)   Soluzione del sistema.
*   ind    Motivo dell'interruzione delle iterazioni.
*           ind=0: valore di f(y) piccolo a sufficienza.
*           ind=1: raggiunto numero massimo di iterazioni.
*           ind=2: incremento y trascurabile.
*   miter  Numero di iterazioni effettuate.
*
*   ALTRI PARAMETRI
*   l,r,d  Fattorizzazione LR della matrice jacobiana:
*           l=parte triangolare inferiore (a banda)
*           r=parte triangolare superiore (a banda)
*           d=diagonale.
*   x(n)   Valore di f(y).
*
*   SOTTOPROGRAMMI CHIAMATI
*   df     Calcola la f (funzione di cui si cercano gli zeri).
*   djac   Calcola la jacobiana della f
*   dnpivb Risolve sistemi lineari a banda con gauss senza
*           pivoting.
*
*****
integer lb,rb,nmax,n,ind,i,j,miter
double precision h,q,rr,t,toll,effe,sh
double precision l(nmax,lb),r(nmax,rb),d(nmax)
double precision x(2*nmax),y(nmax,2)
common h,q,rr,t,sh(500000)
ind=0
do 100 j=1,miter
  write(*,101)'# Inizio iterazione numero ',j
  call djac(l,r,d,n,lb,rb,y,nmax)
  call df(y,n,x,nmax)
  effe=0.0d0
  do 10 i=1,2*n
10    effe=effe+abs(x(i))
  write(*,102)'# Valore di |f|: ',effe

```

```
        if (effe.lt.toll*n) then
            miter=j
            return
        endif
        call dnpivb(l,r,d,x,2*n,lb,rb,nmax,ind,toll)
        effe=0.0d0
        do 20 i=1,2*n
20         effe=effe+abs(x(i))
            if (effe.lt.toll*n) then
                ind=2
                return
            endif
            do 30 i=1,n
30             y(i,1)=y(i,1)-x(2*i-1)
                y(i,2)=y(i,2)-x(2*i)
100            continue
            ind=1
101            format(A27,I2)
102            format(A17,E13.7)
            return
        end
```

3.6 Risultati e grafici delle soluzioni

I risultati seguenti sono stati ottenuti su un PC con processore AMDK6 a 200MHz, sistema operativo Linux 2.0.35, compilatore GNU g77 v.0.5.18.

I grafici riportati nel seguito sono stati ottenuti con il programma Gnuplot. È stata utilizzata una griglia uniforme di 250000 punti.

Come punto di partenza per Newton, per $q = 3$ è stato utilizzato, per $i = 1, \dots, n$,

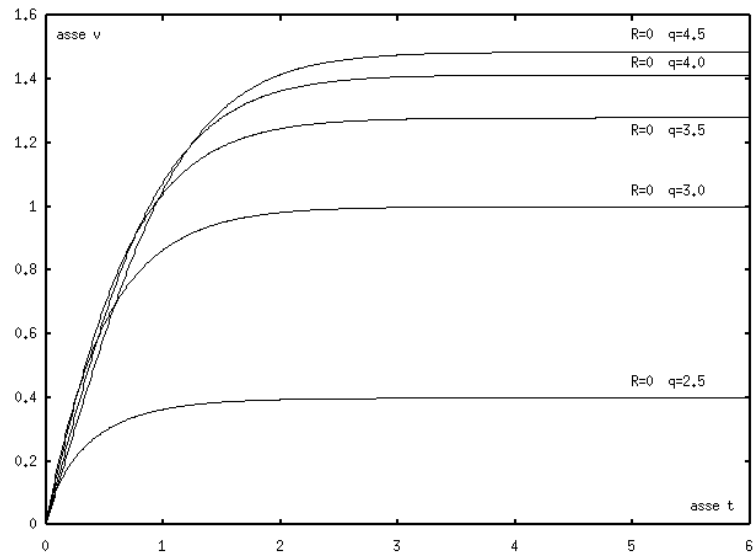
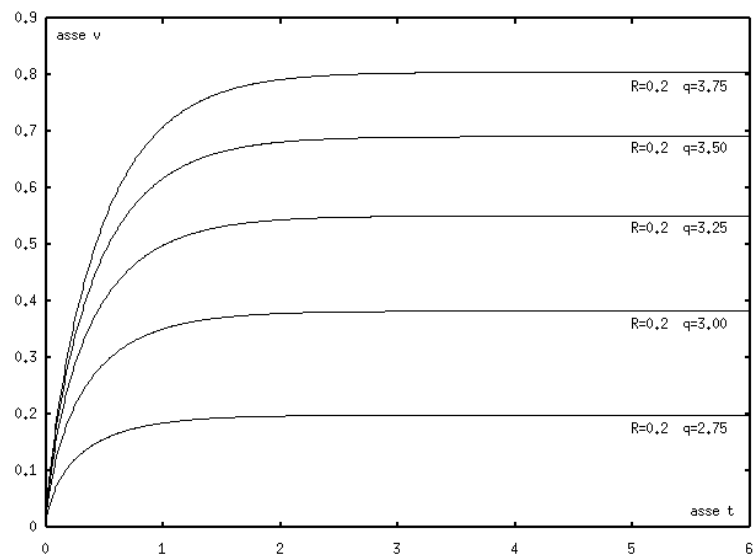
$$y(i, 1) = \begin{cases} ih & \text{per } ih < 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad y(i, 2) = \begin{cases} 1 & \text{per } ih < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Per gli altri valori di q è stata utilizzata come punto di partenza la soluzione del problema al contorno già risolto per lo stesso valore di R e per il valore di q più vicino. È stato scelto un passo di 0.05 per l'esponente q . Un controllo sul segno della soluzione provvede a giudicarla non accettabile qualora il metodo non convergesse alla soluzione positiva del problema ai limiti.

q \ R	0.2	0.0	-0.75	-1
2.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2.25	0.63346	1.22408	2.00667	2.40600
2.5	0.45374	1.34305	2.77470	3.25837
2.75	0.68837	1.48441	3.42084	3.95602
3.0	0.92619	1.84519	3.95000	4.51266
3.25	1.15524	2.16724	4.37268	4.94558
10/3	1.22835	2.26548	4.49230	5.06572
3.5	1.36879	2.44833	4.70288	5.27398
3.75	1.56365	2.68969	4.95510	5.15624
4	1.73884	2.89430	5.14277	5.68873
4.25	1.89466	3.06591	5.27772	5.80506
4.5	2.03205	3.20840	5.36991	5.87683
4.75	2.15251	3.32553	5.42762	5.91323
5	2.25747	3.42060	5.45763	5.92176

Figura 3.1 Tabella di alcuni valori di $C(2, q, R)$

Grafici delle soluzioni del problema ai limiti (3.17)

Figura 3.2 Grafico di $u(t)$ nel caso $R = 0$ per vari valori di q .Figura 3.3 Grafico di $u(t)$ nel caso $R = 0.2$ per vari valori di q .

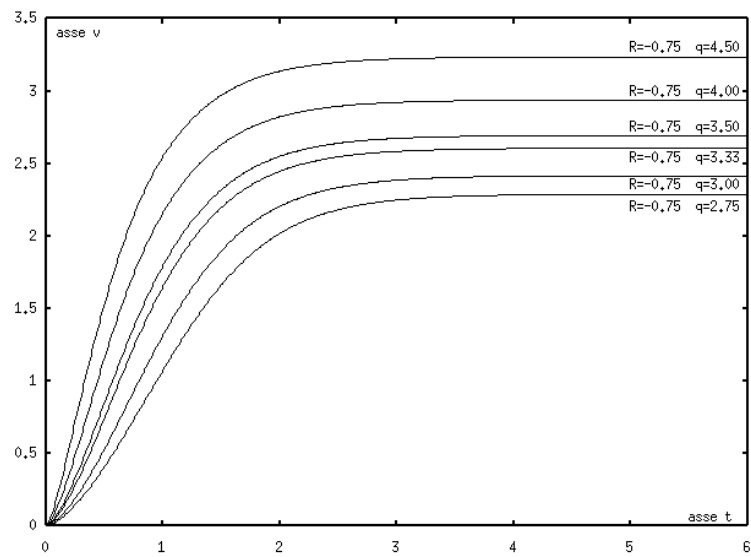


Figura 3.4 Grafico di $u(t)$ nel caso $R = -0.75$ per vari valori di q .

Grafici delle soluzioni di (3.2)

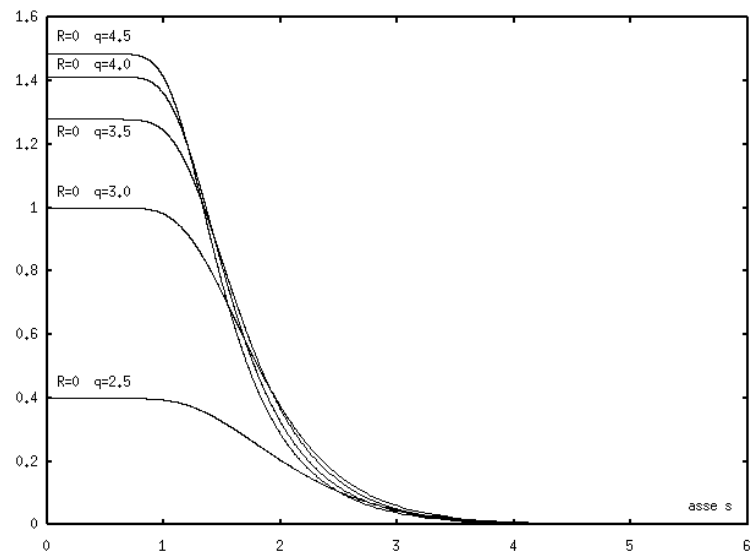


Figura 3.5 Grafico di $v(s)$ nel caso $R = 0$ per vari valori di q .

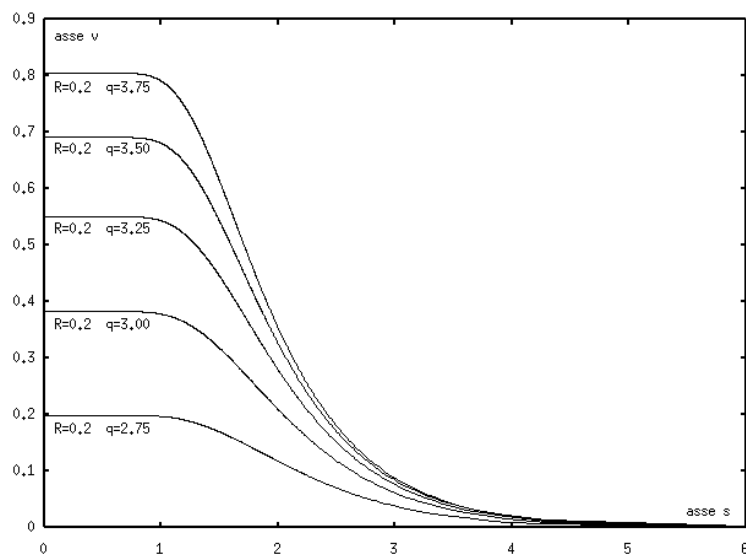


Figura 3.6 Grafico di $v(s)$ nel caso $R = 0.2$ per vari valori di q .

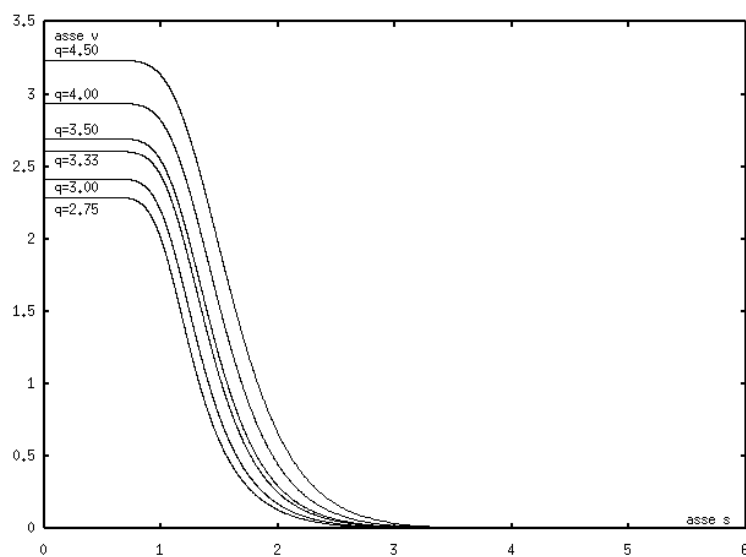


Figura 3.7 Grafico di $v(s)$ nel caso $R = -0.75$ per vari valori di q .

Bibliografia

- [Ada75] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [AMR88] U. M. Asher, R. M. M. Mattheij, and R. D. Russell. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall Series in Computational Mathematics. Prentice Hall, 1988.
- [Aub76a] T. Aubin. Espaces de sobolev sur les variétés riemanniennes. *Bull. Sci. Math.*, 100:149–173, 1976.
- [Aub76b] T. Aubin. Problèmes isopérimétriques et espaces de sobolev. *J. Diff. Geometry*, 11:573–598, 1976.
- [Aub82] T. Aubin. *Nonlinear Analysis on Manifolds: Monge-Ampère Equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol.252, 1982.
- [Bae94] A. BaernsteinII. A unified approach to symmetrization. In A. Alvino, E. Fabes, and G. Talenti, editors, *Partial Differential Equations of Elliptic Type*, Symposia Mathematica 35, pages 47–91. Cambridge Univ. Press, 1994.
- [Ban80] C. Bandle. Isoperimetric inequalities and applications. *Monographs and Studies in Math. 7*, 1980.
- [Bia27] L. Bianchi. *Lezioni di Geometria Differenziale*. Zanichelli, 1927.
- [Bla30] W. Blaschke. *Vorlesungen über Differentialgeometrie, vol. 1*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol.1. Springer-Verlag, 1930.
- [Bli30] G.A. Bliss. An integral inequality. *J. London Math. Soc.*, pages 40–46, 1930.
- [BZ88a] J. Brothers and W. Ziemer. Minimal rearrangements of sobolev functions. *J. Reine Angew. Math.*, 384:153–179, 1988.
- [BZ88b] Yu.D. Burago and V.A. Zalgaller. *Geometric inequalities*. Springer-Verlag, 1988.
- [CB72] S. D. Conte and C. De Boor. *Elementary numerical analysis: an algorithmic approach*. McGraw-Hill, 1972.
- [Cha94] I. Chavel. *Riemannian geometry: A modern introduction*. Cambridge Tracts in Mathematics 108. Cambridge University Press, 1994.
- [Cia89] A. Cianchi. A sharp form of poincaré type inequalities on balls and spheres. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, 40:558–569, 1989. Ed. Pitman.
- [DS58] N. Dunford and J. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory*. Interscience Publ., 1958.

- [FP82] F. Fontanella and A. Pasquali. *Calcolo numerico*. Pitagora Ed., 1982.
- [Fra92] L.E. Fraenkel. On steady vortex rings with swirl and a sobolev inequality. *Progress in partial differential equations: calculus of variations, applications. Pitman Research Notes in Math.*, 266:13–26, 1992.
- [GL83] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1983.
- [GR65] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 1965.
- [HLP] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Univ. Press (first edition 1934, second edition 1952).
- [Kam59] E. Kamke. *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Band I: Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Leipzig, 1959.
- [Kaw85] B. Kawohl. *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*. Springer-Verlag, 1985. Lecture Notes in Math. 1150.
- [Kol89] V.I. Kolyada. Rearrangements of functions and embedding theorems. *Russian Math. Surveys*, 44:5, pages 73–117, 1989.
- [Lam73] J. D. Lambert. *Computational methods in Ordinary Differential Equations*. Wiley and Sons, 1973.
- [Maz85] V. G. Maz'ja. *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag, 1985.
- [McC94] J. McCleary. *Geometry from a differentiable viewpoint*. Cambridge Univ. Press, 1994.
- [McK70] H. P. McKean. An upper bound to the spectrum of δ on a manifold of negative curvature. *J. Differential Geometry*, 4:359–366, 1970.
- [MT] F. Mugelli and G. Talenti. Sobolev inequalities in 2-d hyperbolic space: a borderline case. *Journal of Inequalities and applications*, to appear.
- [MT97] F. Mugelli and G. Talenti. Sobolev inequality in 2-d hyperbolic space. *International Series in Numerical Mathematics*, 123, 1997. Birkhäuser Verlag, Basel.
- [Oss78] R. Osserman. The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84:1182–1238, 1978.
- [PS51] G. Pólya and G. Szegő. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. Princeton Univ. Press, 1951.
- [Sch40] E. Schmidt. über die isoperimetrische aufgabe im n -dimensionalen raum konstanter negativer krümmung i : Die isoperimetrischen ungleichungen in hyperbolischen ebene und für rotationskörper im n -dimensionalen hyperbolischen raum. *Math. Z.*, pages 204–230, 1940.
- [SG70] G. Sansone and J. Gerretsen. *Lectures on the theory of functions of a complex variable vol. 2*. Wotters-Noordhoff, 1970.

- [Sie71] C. L. Siegel. *Topics in Complex Functions Theory, vol. 2: Automorphic Functions and Abelian Integrals*. Interscience Tracts in Pure Appl. Math. 25. Wiley-Interscience, 1971.
- [Swa68] C. A. Swanson. *Comparison and Oscillation Theory of Linear differential Equations*. Academic Press, 1968.
- [Tal87] G. Talenti. *Some inequalities of Sobolev type on two-dimensional spheres*. Pages 401-408 in General Inequalities 5, Int. Series Numer. Math. 80. Birkhäuser-Verlag, 1987.
- [Tal94] G. Talenti. *Inequalities in rearrangement invariant function spaces*. Pages 177-231 in Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications 5. Prometheus Publ. Prague, 1994.
- [Tri61] F. G. Tricomi. *Equazioni differenziali*. Boringhieri, 1961.
- [Zie89] W. P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*. Springer-Verlag, 1989.

Indice

1	Il caso $p \neq 2$	5
1.1	Risultati principali	5
1.2	Riordinamenti	7
1.3	Lemmi	11
1.4	Dimostrazione del teorema TEO:1-1	15
2	Il caso $p = 2$	17
2.1	Geometria del semipiano iperbolico	17
2.2	Risultati principali	20
2.3	Lemmi principali	23
2.4	Stime di $C(2, q, 0)$	26
2.5	Altri lemmi	26
2.6	Dimostrazione del teorema TEOB:2-1	29
2.7	Dimostrazione del teorema TEOB:2-2	31
3	Calcolo numerico delle costanti	39
3.1	Introduzione	39
3.2	Metodi alle differenze finite	40
3.3	Metodi alle differenze per le equazioni non lineari	42
3.4	Costruzione del problema discreto	43
3.5	Implementazione del metodo	45
3.6	Risultati e grafici delle soluzioni	54