

AMEDEO BELLUZZI E GIANLUCA BELLI

Il ponte a Santa Trinita

Dipartimento di Storia dell'Architettura e della Città
Università degli Studi di Firenze

Publicazione realizzata con il contributo
del Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

© 2003 EDIZIONI POLISTAMPA
Sede legale: Via Santa Maria, 27/r
50125 Firenze - Tel. 055.233.7702
Stabilimento: Via Livorno, 8/31 - 50142 Firenze
Tel. 055.7326.272 - Fax 055.7377.428
<http://www.polistampa.com>

ISBN 88-8304-634-X



EDIZIONI POLISTAMPA

tà del metodo fotogrammetrico si deve sopporre la planarità della curva che ne definisce la geometria.

D'altra parte i metodi stereofotogrammetrici potrebbero portare un contributo originale in quanto la conoscenza di alcuni elementi di permanenza sarebbe in grado di fornire un modello stereometrico su cui effettuare delle misurazioni; anche in questo caso però la strada non è praticabile vista la mancanza di una coppia eseguita con la stessa camera fotografica. Appare evidente che per effettuare un qualsiasi tipo di lettura è necessario introdurre, sfruttando direttamente il materiale fotografico storico, delle ipotesi e delle supposizioni.

Nell'ottica di determinare una possibile casistica di famiglie di curve che potrebbero essere suscettibili di contenere quella originariamente impiegata per la definizione delle arcate del ponte, si è voluto tentare di estrapolare delle indicazioni dal materiale fotografico relativo alla situazione anteriore alla distruzione. Naturalmente l'obiettivo dell'indagine non è consistito nella determinazione della curva originaria, verosimilmente deformata in fase esecutiva e senz'altro alterata dai cedimenti strutturali, ma più modestamente nel cercare di limitare la possibilità della scelta tra le infinite curve esistenti. In ragione di ciò la precisione del rilievo anche se con tolleranze ampie, dovute ai possibili errori introdotti da ipotesi non verificabili, non avrebbe impedito la correttezza generale dell'indagine. A tal fine nelle operazioni svolte una prima ipotesi che è stata formulata nella trattazione del materiale con metodi fotogrammetrici, oltre alla supposizione della planarità di alcuni elementi geometrici che definivano la forma delle arcate e delle linee fondamentali del ponte, è stata l'assimilazione della verticalità delle pile e l'assunzione di un rapporto tra luce e freccia del ponte desunto dai rilievi storici, che non risultano pienamente coincidenti. L'introduzione di queste ipotesi, senza le quali il raddrizzamento non può essere eseguito, rappresenta, comunque, il più grave limite per la correttezza dell'intera operazione. Dagli elaborati così ottenuti è stata campionata, discretizzando con un passo costante, una metà dell'arcata centrale del ponte fornendo un insieme di liste di punti planari di coordinare note.

Questi ultimi sono poi serviti come base per iniziare a ragionare sulla più probabile famiglia di curve che si adattava con minore errore alle serie dei punti campionati.

A conclusione di quanto esposto vale la pena ricordare che più che porsi come obiettivo quello di indagare quale sia stata la forma geometrica progettata dall'Ammannati l'intento di questa breve nota è stato quello di inquadrare il problema nelle sue connotazioni generali evidenziandone le difficoltà che ora, come allora, sono presenti.

SULLA CURVA DEL PROFILO DELL'ARCO CENTRALE

NEL PONTE A SANTA TRINITA

Franco Magelli

Il problema della determinazione del tipo di curva costituente il profilo delle arcate del ponte a Santa Trinita di Firenze è stato già affrontato numerose volte in passato.

Cito ad esempio uno scritto di Pietro Ferroni¹ del 1808 in cui le possibilità tecniche si confrontano sia con il livello culturale matematico dei costruttori del periodo dell'Ammannati², sia con il linguaggio matematico a volte piuttosto approssimativo: i termini ellisse (sezione conica) e ovata (unione liscia di archi di cerchio) ad esempio si trovano a volte usati in maniera impropria.

Da un punto di vista più matematico, Di Teodoro, Barbi, Pii e Tonietti³ in uno studio del 1981 formularono un'ipotesi a priori sulla natura della curva partendo dal presupposto che fosse un arco di ellisse.

Fu presa in esame una famiglia di ellissi dipendente da tre parametri:

A. semidiametro orizzontale;

B. semidiametro verticale;

C. spostamento verticale del centro dell'ellisse lungo l'asse delle ordinate.

Il criterio scelto per la valutazione della qualità dell'approssimazione dei dati rilevati con una curva della famiglia fu quello del χ^2 o dei minimi quadrati (non è chiaro però in che modo sia stato utilizzato, si veda più avanti), i dati presi in considerazione sono quelli del Ferroni (1785) e del Vulliamy (1818).

In questa appendice ci baseremo su dati rilevati dalla fotografia Brogi 3063 (fig. 79) in cui l'inquadratura del ponte, sebbene non ravvicinata, è quasi frontale. Sui dati è stata effettuata, secondo quanto descritto da Lorenzo Bianchini, una correzione prospettica in modo da rendere il rilievo presso-

¹ FERRONI 1808.

² "non poteva darsi a credere come in un'età anteriore a Galileo si conoscesse in Toscana (e massimamente da un Architetto) la Parabola d'Apollonio" (ivi).

³ DI TEODORO, BARBI, PII e TONIETTI 1981, appendice quinta.

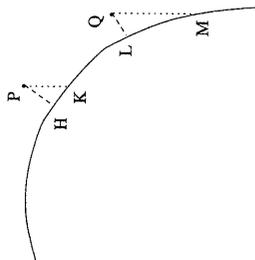
ché frontale. Sono stati rilevati 31 punti nella semiarcata destra dell'arco centrale⁴.

Sono stati presi in esame vari prototipi per il profilo dell'arcata, alcuni dei quali (le parabole) in contrasto con le considerazioni del Ferroni, cercando di fare il minor numero possibile di assunzioni *a priori*.

Anche in questo studio il criterio di valutazione delle approssimazioni è quello dei *minimi quadrati*.

Sceita una curva di cui si vuole valutare la prossimità all'insieme dei dati rilevati, il criterio consiste nel valutare, per ciascuno dei 31 punti, la distanza tra la curva e il punto (cioè il minimo, al variare del punto sulla curva, della lunghezza del segmento congiungente il dato rilevato al punto della curva. Nel nostro caso, la lunghezza del segmento perpendicolare alla curva stessa: i segmenti PH e QL in fig. 80) e sommare i quadrati dei valori ottenuti.

Alternativamente, avremmo potuto scegliere come distanza semplicemente la differenza tra le ordinate del dato rilevato e del corrispondente punto sulla curva da valutare: nel caso esemplificato i segmenti PK e QM (fig. 80). Questo tipo di valutazione è quello utilizzato spesso da software commerciali. I due criteri, equivalenti quando si ha a che fare con rette, non lo sono più negli altri casi. Nei tratti in cui la pendenza della curva è alta le differenze sono significative: il punto Q verrebbe valutato più lontano dalla curva di P, mentre non è questo quello che vogliamo.



80. Criteri di valutazione della distanza di un punto da una curva.

⁴ Sono stati presi in considerazione i punti contraddistinti dalle seguenti coordinate:

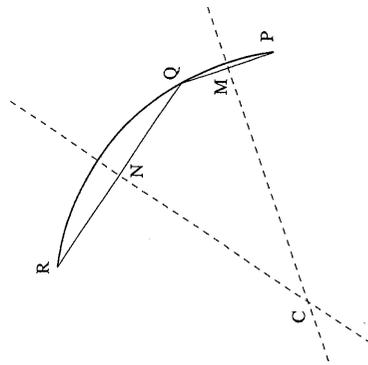
0.4789	0.2329	0.6095	0.2240	0.7249	0.1985	0.7848	0.1681	0.8044	0.1445
0.5076	0.2329	0.6336	0.2200	0.7339	0.1957	0.7896	0.1645	0.8055	0.1405
0.5227	0.2327	0.6517	0.2166	0.7436	0.1917	0.7920	0.1619	0.8061	0.1374
0.5413	0.2315	0.6680	0.2132	0.7530	0.1874	0.7948	0.1591		
0.5587	0.2301	0.6887	0.2087	0.7601	0.1836	0.7972	0.1559		
0.5786	0.2283	0.7020	0.2051	0.7685	0.1792	0.8004	0.1515		
0.5933	0.2264	0.7136	0.2021	0.7785	0.1728	0.8022	0.1481		

Nonostante la maggiore complessità e onerosità di calcolo, il primo criterio è stato preferito al secondo.

Le famiglie di curve prese in esame sono:

- parabola arbitraria con asse verticale
- parabola arbitraria con asse orizzontale
- parabola con asse inclinato di circa 12 gradi verso il basso (Brizzi)
- catenaria arbitraria, ammettendo anche modifiche del rapporto di proporzione orizzontale/verticale
- ellisse arbitraria con assi orizzontale e verticale.

È stato esaminato anche il caso di curve policentriche formate da archi di circonferenza. Per la particolare tipologia di queste curve l'analisi è stata portata avanti in maniera diversa rispetto agli altri casi: consideriamo i primi tre punti rilevati: per 3 punti passa una sola circonferenza il cui centro è facilmente determinabile (fig. 81). Ripetendo il procedimento utilizzando le successive terne di punti, si ottengono 29 punti candidati ad essere i centri degli archi della policentrica.



81. Centro di una circonferenza per i punti P, Q, R. Le rette tratteggiate sono gli assi dei segmenti PQ e QR. Il punto C è il centro della circonferenza passante per P, Q, R.

Se i centri ipotetici risultassero addensati intorno ad uno o più punti l'ipotesi policentrica sarebbe ragionevole; viceversa, nel caso in cui risultassero distribuiti uniformemente l'ipotesi andrebbe scartata.

In ciascuno dei grafici delle figure 82-86 sono riportati i 31 punti elencati in nota 4 sovrapposti alla curva ottenuta come migliore approssimazione all'inter-

no della rispettiva famiglia. Si noti che nei disegni riportati non è stata utilizzata la stessa scala per l'asse verticale e quello orizzontale. Nelle figure 82-86 l'unità verticale è circa 1,93 volte quella orizzontale.

Risulta evidente dalle figure 82 e 83 che le parabole con asse orizzontale o verticale mal si adattano ai dati.

Il disegno riportato per la catenaria (fig. 85) non rappresenta la migliore approssimazione sui 31 punti (di qualità peraltro paragonabile a quella delle parabole). Si apprezza quanto buona sia l'approssimazione limitandosi alla parte dell'arcata più vicina alla pila.

In curve come le catenarie e le parabole la curvatura decresce rapidamente via via che ci si allontana dal vertice. In altri termini, lontano dai punti di massima curvatura sono quasi delle rette. Questo le rende poco adattabili ai dati rilevati. L'errore commesso per alcune famiglie di curve è il seguente:

- Parabola con asse verticale 0.02464;
- Parabola con asse inclinato 0.00371;
- Ellisse 0.00422.

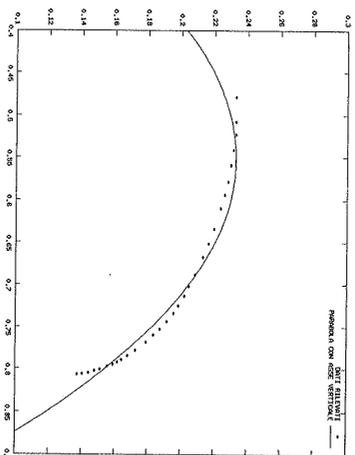
Nel caso dell'ellisse (fig. 86) si ottengono i risultati migliori con un errore circa sei volte inferiore a quello ottenuto per le parabole con asse verticale o orizzontale. Sono stati utilizzati quattro parametri: due per la posizione del centro della ellisse e due per le lunghezze dei semiassi.

I valori ottenuti sono:

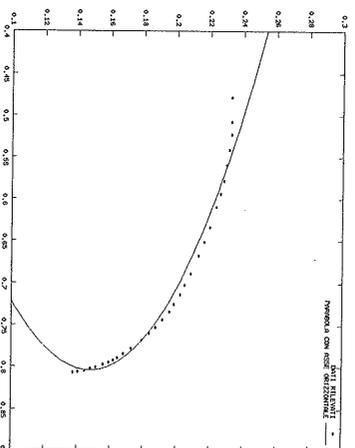
- Centro di coordinate (0.485810309, 0.127580088)
- Semiassi orizzontale: 0.323098617
- Semiassi verticale: 0.104841272.

Il caso della parabola con asse inclinato è stato trattato in maniera leggermente diversa. Per la maggiore complessità dell'equazione di tali parabole si è preferito ruotare di 12 gradi in senso orario i dati rilevati in modo da eseguire una simulazione utilizzando parabole con asse orizzontale. Come si può vedere dalla figura 84 la qualità dell'approssimazione è molto buona. Questa affermazione è in apparenza contraddizione con quanto affermato poco sopra. Si tenga presente però che si è aggiunto un grado di libertà (l'inclinazione dell'asse della parabola). È stata considerata una famiglia molto più ampia di parabole, rendendo la curva più adattabile ai dati. I risultati, pur essendo leggermente migliori, sono paragonabili a quelli ottenuti per l'ellisse.

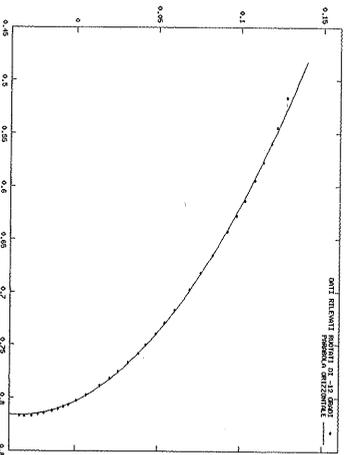
Per concludere, due parole sulle curve policentriche: il grafico in figura 87 è relativo a questa famiglia di curve. Vi sono riportati i punti in nota 4 con la spezzata che li unisce e i 29 centri determinati come descritto in precedenza. Dalla distribuzione dei centri l'ipotesi policentrica è decisamente da scartare.



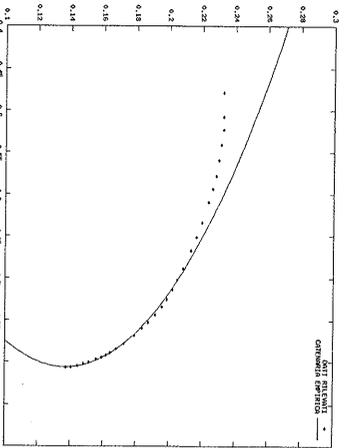
82. Parabola con asse verticale.



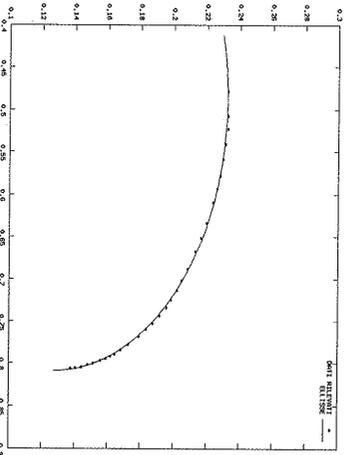
83. Parabola con asse orizzontale.



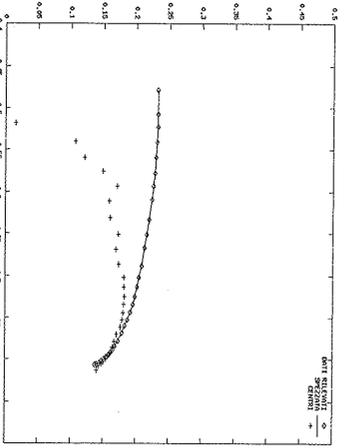
84. Parabola con asse inclinato.



85. Catenaria empirica.



86. Ellisse.



87. Policentrica: dati rilevati e ipotetici centri.

