METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2005-2006

11 settembre 2007 - prova scritta decimo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Sono ammessi alla prova orale gli studenti che risolvono correttamente l'esercizio 1 più uno a scelta tra i successivi.

Esercizio 1: Determinare gli z che soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} z^3 + z^2 + (1+i)z = 0 \\ \mathrm{Re}\left[\log\left(z + \dfrac{i}{2} + \dfrac{3}{2}\right)\right] = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Disegnare le soluzioni di ciascuna delle due equazioni considerate separatamente.

Esercizio 2: Si ha a disposizione un'oscillatore che produce un segnale sinusoidale di con fase zero e periodo $2\pi/k$. Le regolazioni dell'oscillatore ci permettono di scegliere a piacimento l'ampiezza del segnale prodotto e la frequenza di oscillazione tra quelle consentite. Come vanno regolate ampiezza e frequenza dell'oscillatore se si vuole ottenere la migliore approssimazione del segnale $f(x) = -\chi_{[-\pi/3,0]}(x) + \chi_{[0,\pi/3]}(x)$ tra $-\pi$ e π nel senso dei minimi quadrati?
Calcolare l'errore commesso con l'approssimazione.

Esercizio 3: Sia

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } -3 \le x \le -1 \\ -1 & \text{se } -1 < x \le 0 \\ e^{-2x}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases} .$$

Determinare la trasformata di Fourier di $f(x)$.

Esercizio 4: Facendo uso della trasformata di Laplace si determini, per $x > 0$, la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y' + 2y = \chi_{[1,\infty)}(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 5: Disegnare le linee di livello di parte reale e parte immaginaria della funzione olomorfa

$$f(z) = z^2 - 2z + 2$$