

11 gennaio 2008 - prova scritta secondo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Sono ammessi alla prova orale gli studenti che risolvono correttamente e completamente l'esercizio 1 più uno a scelta tra i successivi.

Esercizio 1: Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} z^7 = z \\ \frac{(z - |z|)^3}{|z|} - |z^2| = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 2: Determinare raggio di convergenza e somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{4^n} z^{2n} .$$

Detta $f(z)$ la somma della serie, quanto vale $\frac{d^7 f}{dz^7}(0)$?

Esercizio 3: Utilizzando le trasformate di Laplace risolvere, per $x > 0$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = x + 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Determinare inoltre l'ascissa di convergenza della soluzione del problema.

Esercizio 4: Sia $z = x + iy$. Determinare, se esiste, una funzione olomorfa f tale che $f(i) = 1$ e

$$\operatorname{Im}(f) = e^{-y}(y \cos x + x \sin x) - 2xy - \frac{1}{e} .$$