METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2005-2006

28 marzo 2007 - prova scritta sesto appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1: (6 punti) Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} \sqrt{3}|z|^2 = z^2 - \overline{z}^2 \\ |z - (\sqrt{3}-1)(1+i)|^2 = 2(\sqrt{3}-1)^2 \end{cases}.$$

Esprimere le soluzioni in forma cartesiana, in forma trigonometrica e in forma esponenziale.

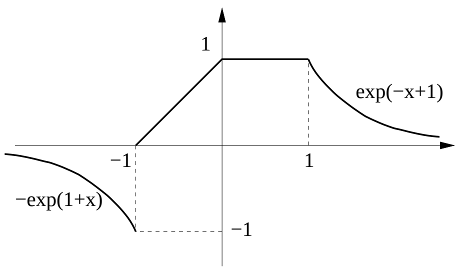
Esercizio 2:

a) (4 punti) Determinare raggio di convergenza e somma della serie di potenze:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}.$$

b) (4 punti) Indicata con $f(x)$ la somma della serie al punto a), scrivere la serie di potenze di centro l'origine di $f'(x) + f''(x)$ e calcolarne il raggio di convergenza.

Esercizio 3: (6 punti) Scrivere la trasformata di Fourier della funzione il cui grafico è riportato in figura.



Esercizio 4: a) (4 punti) Sviluppare in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}.$$

b) (4 punti) Indicata con $F(x)$ la somma della serie di Fourier di $f(x)$, determinare lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ di $g(x) = F\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$. (Suggerimento: si utilizzi il risultato del punto precedente).

Esercizio 5: (7 punti) Facendo uso delle trasformate di Laplace si risolva, per $x > 0$, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4 = e^{-4x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$