

**29 giugno 2006 - prova scritta primo appello**

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

**Esercizio 1:**

- a) (4 punti) Determinare le soluzioni  $z \in \mathbb{C}$  dell'equazione

$$z^5 - z^4 + (8 + 8\sqrt{3}i)z = 16e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

- b) (4 punti) Sia  $D$  il poligono convesso individuato dalle soluzioni dell'equazione al punto precedente. Stabilire se la funzione

$$f(z) = \frac{3z + 4e^z}{z^6 + z^4 - 4z^2 - 4}$$

è olomorfa in  $D$ .

**Esercizio 2:**

- a) (5 punti) Determinare raggio di convergenza e somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n n^2 z^n.$$

- b) (3 punti) Si calcoli la somma della serie numerica  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ .

**Esercizio 3:**

- (5 punti) Tra le combinazioni lineari di  $1$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(2x)$  determinare quella che meglio approssima  $f(x) = 1 - 3x + x^2$  nel senso dei minimi quadrati nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . Si determini l'errore commesso con l'approssimazione.

**Esercizio 4:**

- a) (6 punti) Facendo uso della trasformata di Laplace si risolva, per  $x \geq 0$ , il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2 = e^{-2x} \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

- b) (2 punti) Si determini l'ascissa di convergenza della soluzione del problema di Cauchy al punto a).

**Esercizio 5:**

**(6 punti)** Si determini la trasformata di Fourier della funzione il cui grafico è riportato in figura:

