

METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2003-2004  
5 luglio 2004 - prova scritta primo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

**Esercizio 1: (4 punti)** Determinare gli  $z \in \mathbb{C}$  tali che 
$$\begin{cases} z^6 + 1 = 0 \\ \left(z + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

**Esercizio 2: (4 punti)** Determinare raggio di convergenza e somma della serie 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n+1)!}.$$

**Esercizio 3:**

- a) (6 punti) Determinare la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati della funzione  $f(x) = x$  mediante polinomi del tipo  $a + bx^2$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), nell'intervallo  $[0, 1]$ .
- b) (2 punti) Calcolare l'errore commesso con l'approssimazione.

**Esercizio 4:** *Suggerimento: disegnare il grafico di  $f(x)$ ,  $g_1(x)$  e di  $g_2(x)$ .*

- a) (4 punti) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{1-x} & x > 1 \end{cases}.$
- b) (4 punti) Sfruttare il risultato del punto a) per scrivere la trasformata di Fourier delle funzioni

$$g_1(x) = \begin{cases} e^{x+1} & x < -1 \\ 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ e^{1-x} & x > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g_2(x) = \begin{cases} -e^{x+1} & x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{1-x} & x > 1 \end{cases}$$

**Esercizio 5:**

- a) (4 punti) Scrivere la trasformata di Laplace della funzione  $f(x)$  disegnata in figura.
- b) (4 punti) Sfruttare il risultato precedente per calcolare la trasformata di Laplace di  $g(x) = n$  per  $x \in [n, n+1)$ ,  $n > 0$ .

