Soluzioni Foglio 7

Esercizio 7.1

a) I valori che la funzione assume per $x < 0$ non influenzano la trasformata.
$\mathcal{L}[f(x)](s) = \mathcal{L}[e^{-x}](s) = \dfrac{1}{s+1}$, Re$(s) > -1$;

b) $\mathcal{L}[\cosh x](s) = \dfrac{s}{s^2-4}$; segue $\mathcal{L}[f(x)](s) = \mathcal{L}[\cosh x](s+4) = \dfrac{s+4}{(s+4)^2-4}$, Re$(s) > -2$;

c) $\mathcal{L}[f(x)](s) = \dfrac{s-2}{e(s^2-4s+13)}$, Re$(s) > 2$;

d) $\mathcal{L}[f(x)](s) = \dfrac{1}{s+2}$, Re$(s) > -2$;

e) $\mathcal{L}[f(x)](s) = \dfrac{3}{e(s^2-6s+18)}$, Re$(s) > 3$;

f) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\, e^{-sx}\, dx = \frac{\coth\left(\frac{\pi}{2}s\right)}{s^2+1}$. La funzione $g(x) = |\sin x|$ è periodica di periodo π quindi, dalla formula per le trasformate delle funzioni periodiche, poichè tra 0 e π il seno è positivo.
$\mathcal{L}[g(x)](s) = \dfrac{1}{1-e^{-\pi s}} \dfrac{\coth\left(\frac{\pi}{2}s\right)}{s^2+1}$. Infine $\mathcal{L}[f(x)](s) = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{g}(s-i) + \widehat{g}(s+i)\right)$. Il semipiano di convergenza è Re$(s) > 0$.

Esercizio 7.2

a) Si osservi che $\mathcal{L}[xf(x)] = -\dfrac{d}{ds}\widehat{f}(s) = -\mathcal{L}[\sin x](s) = -\dfrac{1}{1+s^2}$.

$\widehat{f}(s) = -\displaystyle\int_0^s \frac{d\sigma}{1+\sigma^2} + \widehat{f}(0) = \widehat{f}(0) - \arctan s$. Ma $\widehat{f}(0) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ e quindi

$\mathcal{L}[f(x)](s) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan(1/s)$.

b) Basta osservare che $e^{|x-3|} = \begin{cases} e^{3-x}, & 0 < x < 3 \\ e^{x-3}, & x \geq 3 \end{cases}$. Si trasformano separatamente i due casi per poi sommare i risultati. In definitiva, $\mathcal{L}[f(x)](s) = -\dfrac{e^{-3}}{(s+1)} - \dfrac{2e^{-3s}}{(s^2-1)}$; si ricordi che i valori di f per $x < 0$ non contribuiscono al calcolo della trasformata.

c) Si sfrutta il risultato del punto a): detta $g(x)$ la funzione dell'esercizio 7.3a,
$\mathcal{L}[f(x)](s) = \mathcal{L}[g(x)\sin x](s) = \dfrac{1}{2i}\left(\widehat{g}(s-i) - \widehat{g}(s+i)\right) = \dfrac{1}{2i}\left(\arctan(s+i) - \arctan(s-i)\right)$.

d) $\mathcal{L}[x^4](s) = \dfrac{24}{s^5}$, da cui $\mathcal{L}[x^4 e^{-x}](s) = \dfrac{24}{(s+1)^5}$. Ma $f(x) = H(x) * (x^4 e^{-x})$ e quindi

$\mathcal{L}[f(x)](s) = \mathcal{L}[H(x) * (x^4 e^{-x})](s) = \dfrac{1}{s}\,\mathcal{L}[x^4 e^{-x}](s) = \dfrac{24}{s(s+1)^5}$.

e) Se $g(x) = H(x)\sin x$, allora $f(x) = g(x) - g(x-2\pi)$.
Passando alle trasformate, $\mathcal{L}[f(x)](s) = \widehat{g}(s) - e^{-2\pi s}\widehat{g}(s) = \dfrac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}$.

f) $\mathcal{L}[x^2-2x+2](s) = \dfrac{2}{s^3} - \dfrac{2}{s^2} + \dfrac{2}{s}$. Quindi $\mathcal{L}[f(x)](s) = \mathcal{L}[(x^2-2x+2)e^x](s+1) =$

$= \mathcal{L}[x^2-2x+2](s+1) = \dfrac{2(s^2+s+1)}{(s+1)^3}$.

g) $\mathcal{L}[e^{2x}-e^x+2](s) = \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{2}{s}$. Segue $\mathcal{L}[f(x)](s) = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{2x}-e^x+2](s) =$

$= \dfrac{1}{(s-2)^2} - \dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{2}{s^2}$.

h) Si utilizza il risultato del punto c) e lo stesso metodo utilizzato per in a).
$\mathcal{L}[xf(x)](s) = \dfrac{1}{2i}\left(\arctan(s-i) - \arctan(s+i)\right) = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[f(x)](s)$. Quindi,

$\mathcal{L}[f(x)](s) = \widehat{f}(0) + \dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_0^s \arctan(\sigma - i) - \arctan(\sigma+i)\,d\sigma$. Facendo i calcoli,

$\mathcal{L}[f(x)](s) = \dfrac{\pi}{2} - i\arctan\left(\dfrac{s}{2}\right) + (s-i)\arctan(s-i) - (s+i)\arctan(s+i)$.

Esercizio 7.3

a) Osserviamo innanzitutto che i valori che $f(x)$ assume per $x<0$ non intervengono nel calcolo della trasformata.

$$\mathcal{L}[\chi_{[0,1]}(x)](s) = \mathcal{L}[H(x)](s) - \mathcal{L}[H(x+1)](s) = \frac{1-e^{-s}}{s}.$$

Inoltre, se $0<x<1$, $-\chi_{[0,1]}(x) = \dfrac{d}{dx}(1-x)$. Passando alle trasformate,

$$-\mathcal{L}[\chi_{[0,1]}(x)](s) = s\,\mathcal{L}[1-x](s) - 1, \quad \text{da cui} \quad \mathcal{L}[1-x](s) = \frac{s+1-e^{-s}}{s^2}.$$

Infine,

$$\mathcal{L}[1-(x-1)](s) = \frac{s+1-e^{-s}}{s^2}e^{-s} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[f(x](s) = \frac{1}{s} + \frac{(s+1)(1-e^{-s})}{s^2}.$$

b) Conviene considerare $f(x)$ come composta da tre parti:

$$g_1(x) = \begin{cases} \sin x & x \le 2\pi \\ 0 & x > 2\pi \end{cases}, \quad g_2(x) = \begin{cases} -1 & x \le \pi \\ 1 & \pi < x \le 2\pi \\ 0 & x > 2\pi \end{cases}, \quad g_3(x) = \begin{cases} 0 & x < 2\pi \\ e^{-x+2\pi} & x > 2\pi \end{cases}.$$

Nell'es 7.2e) è già stata calcolata $\widehat{g}_1(s)$. Con pochi calcoli si trova $\widehat{g}_2(s) = -\dfrac{(1-e^{-s})}{s^2}$. D'altra parte $\widehat{g}_3(s) = e^{-2\pi s}\,\mathcal{L}[e^{-x}](s) = \dfrac{e^{-2\pi s}}{s+1}$. Infine, $\widehat{f}(s) = \widehat{g}_1(s) + \widehat{g}_2(s) + \widehat{g}_3(s)$.

c) Conviene considerare $f(x)$ come composta da tre parti:

$$g_1(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}, \qquad g_2(x) = \chi_{[1,2]}(x), \qquad g_3(x) = 1 - g_1(x-2).$$

Facendo i calcoli,

$$\widehat{g}_1(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{2+2s+s^2}{s^3}e^{-s}, \qquad \widehat{g}_2(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}e^{-s}, \qquad \widehat{g}_3(s) = \left(\frac{1-e^{-s}}{s}e^{-s} - \widehat{g}_1(s)\right)e^{-2s}.$$

Sommando le tre parti, $\widehat{f}(s) = \dfrac{2}{s^3}\left(e^{-2s}-1)(1-(s-1)e^{-s}\right)$.

d) Nell'esercizio 7.3c) è già stata calcolata la trasformata di $g_1(x) = x^2\chi_{[0,1]}(x)$. Tenendo conto che la funzione $f(x)$ è periodica di periodo 1,

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{1-e^{-s}}\widehat{g}_1(s) = \frac{1}{1-e^{-s}}\left(\frac{2}{s^3} - \frac{2+2s+s^2}{s^3}e^{-s}\right).$$

Esercizio 7.4 Si tratta di applicare ripetutamente la formula per la trasformata di una funzione per un coseno iperbolico. Dalle formule di Eulero $\cosh^n(x) = \dfrac{(e^x+e^{-x})^n}{2^n}$; l'esponenziale dominante è e^{nx} dunque l'ascissa di convergenza di $\widehat{g}_n$ sarà n. Si osservi poi che

$$(e^x+e^{-x})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{(2k-n)x}, \quad \text{da cui} \quad \widehat{g}_n(s) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\widehat{f}(s+(2k-n)).$$