Soluzioni Foglio 5

Esercizio 5.1 Si verifica facilmente che i vettori $v_1 = (1, 2, 2)$ e $v_2 = (2, 1, -2)$ sono una base ortogonale del piano $2x - 2y + z = 0$. Di conseguenza, una base ortonormale è: $u_1 = (1/3, 2/3, 2/3)$, $u_2 = (2/3, 1/3, -2/3)$. Il vettore approssimante $z = (0, 0, 1)$ avrà la forma $a_1u_1 + a_2u_2$ dove

$$a_1 =< u_1, z >= \frac{2}{3}, \qquad a_2 =< u_2, z >= -\frac{2}{3}.$$

La migliore approssimazione di z nel senso dei minimi quadrati è allora

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}\left(-2, 2, 8\right).$$

Infine, l'errore commesso è dato da $\sqrt{|z| - a_1^2 - a_2^2} = \sqrt{1 - 4/9 - 4/9} = 1/3$.

Esercizio 5.2 Siano $p_1(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$, $p_2(x) = a_2x^2+b_2x+c_2$, $p_3(x) = a_3x^2+b_3x+c_3$ elementi di V. Per imporre che formino una base ortonormale per V dobbiamo imporre 6 condizioni sui loro coefficienti:

$$\begin{array}{ccc} \|p_1\|_V = 1, & \|p_2\|_V = 1, & \|p_3\|_V = 1, \\ \langle p_1, p_2\rangle_V = 0, & \langle p_1, p_3\rangle_V = 0, & \langle p_2, p_3\rangle_V = 0. \end{array}$$

Poiché i coefficienti in totale sono 9, possiamo scegliere 3 coefficienti. Una scelta pratica è chiedere che p_1 abbia grado zero (2 condizioni: $a_1 = 0$ e $b_1 = 0$) e che p_2 abbia grado uno (1 condizione: $a_2 = 0$).

Il vantaggio di questa scelta è nel fatto che i primi k polinomi della base che determineremo sono a loro volta una base ortonormale per i polinomi di grado al più $k - 1$ definiti sullo stesso intervallo.

Imponendo le 6 condizioni rimanenti si ricavano:

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad p_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \qquad p_3(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(-3x^2 + 1).$$

Esercizio 5.3 Siano $p_1(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$, $p_2(x) = a_2x^2+b_2x+c_2$, $p_3(x) = a_3x^2+b_3x+c_3$ elementi di W. Con considerazioni analoghe a quelle fatte per l'esercizio 5.2, cerchiamo una base ortonormale $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$ con q_1 di grado zero e q_2 di grado 1. Imponendo le 3 condizioni di ortogonalità e le 3 condizioni sulla norma dei 3 elementi della base troviamo:

$$q_1(x) = 1 \qquad q_2(x) = \sqrt{6}(2x - 1), \qquad q_3(x) = \sqrt{\frac{7}{60}}\left(x^2 - x - \frac{1}{6}\right).$$

Esercizio 5.4 Il procedimento è lo stesso utilizzato per l'eserczio 5.1. Utilizzeremo la base ortonormale determinata nell'esercizio 5.2 ed il prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx. \tag{1}$$

Esercizio 5.5

a) $f(x) = -2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin(kx)}{k};$

b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos[(2k+1)x];$

c) $f(x) = -2\pi\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\sin(kx) - \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}\sin[(2k+1)x];$

d) $f(x) = 1;$

e) $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)}\sin[(2k+1)x];$

f) $f(x) = -2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{\pi^2}{k} + \frac{6}{k^3}\right)\sin(kx);$

g) $f(x) = \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{\pi^2}{k} + \frac{6}{k^3}\right)\cos(kx);$

h) $f(x) =;$

i) $f(x) = \frac{\sinh(\pi a)}{\pi}\left\{\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2+k^2}\left(a\cos(kx) - k\sin(kx)\right)\right\};$

j) $f(x) = -\frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{1+k^2}\sin(kx);$

k) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\sin[(2k+1)x];$

Esercizio 5.6

a) $u(x,t) = e^{-t/2}\sin x.$

b) $u(x,t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2}{4}t}}{(2k+1)^2}\cos[(2k+1)x];$