METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2005-2006

29 giugno 2007 - prova scritta ottavo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1: Sia $z \in \mathbb{C}$; si consideri la disuguaglianza: $iz\overline{z} + 2z + 4\overline{z} < 3$.

a) (4 punti) Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ la disuguaglianza ha senso e disegnare tale insieme nel piano complesso.

a) (3 punti) Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ la disuguaglianza è soddisfatta. Disegnare tale insieme nel piano complesso.

Esercizio 2:

a) (5 punti) Sia $z \in \mathbb{C}$ e sia $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^{n+2}}{n2^n}$.
Determinare, il raggio di convergenza della serie e l'espressione di $f(z)$.

b) (3 punti) Sia

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^{n+2}}{n2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(z-2)^{n+2}}{n2^n}.$$

Cosa si può dire del raggio di convergenza della serie di $g(z)$?
(suggerimento: calcolare esplicitamente i coefficienti a_n è lungo e molto complicato. Si consiglia di procedere utilizzando i risultati noti sulle serie di potenze)

Esercizio 3: Sia $\widehat{f}(\xi)$ la trasformata di Fourier della funzione $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Supponendo $g_1(x), g_2(x)$ integrabili, si scrivano le loro trasformate di Fourier nel caso in cui:

(4 punti) $$g_1(x) = \sin(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \chi_{[0,1]}(x-t)\, dt$$

(4 punti) $$g_2(x) = x\, e^{ix} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \sin(t)\, dt$$

Esercizio 4: **(6 punti)** Sia V lo spazio delle funzioni del tipo

$$f(x) = \begin{cases} a & -3 \le x < -1 \\ b & -1 \le x < 1 \\ c & 1 \le x < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

per $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Si determini la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati della funzione $g(x) = x + x^2$ nell'intervallo $[-3, 3]$ mediante funzioni di V.

Esercizio 5: **(6 punti)** Facendo uso della trasformata di Laplace si determini, per $x > 0$, una soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = \sin(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$