METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2004-2005

23 marzo 2006 - prova scritta sesto appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1: Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

Facendo uso della trasformata di Fourier determinare:

a) (4 punti) $g(x) = (f * f)(x)$.

b) (4 punti) $h(x) = (g * g)(x)$.

Esercizio 2:

(6 punti) Si determini per quali valori di $\lambda \geq 0$ l'equazione

$$z^2 + \lambda z\overline{z} = 2(z-1)$$

ammette soluzione in $\mathbb{C}$ e, quando questo accade si scrivano esplicitamente le soluzioni.
Quali sono le soluzioni, se ne esistono, nel caso $\lambda = 0$?

Esercizio 3: Sia $f(x) = |\sin(x)|$ e si indichi con

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

la serie di Fourier di f nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

a) **(4 punti)** Si determinino i coefficienti a_n e b_n.

b) **(4 punti)** Sia $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [na_n \sin(nx) - nb_n \cos(nx)]$. Si disegni il grafico di g nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Esercizio 4:

(6 punti) Facendo uso delle trasformate di Laplace, si determini la soluzione per $x > 0$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Esercizio 5a: (solo studenti a.a. 2002-2003 e successivi)

(5 punti) Determinare raggio di convergenza e somma della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n-1}-1)\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Esercizio 5b: (solo programma 2001-2002)

(5 punti) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}.$$