METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2004-2005

19 settembre 2005 - prova scritta terzo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1:

(6 punti) Facendo uso delle trasformate di Laplace si risolva, per $x \geq 0$, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 9y = e^{2-x} \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

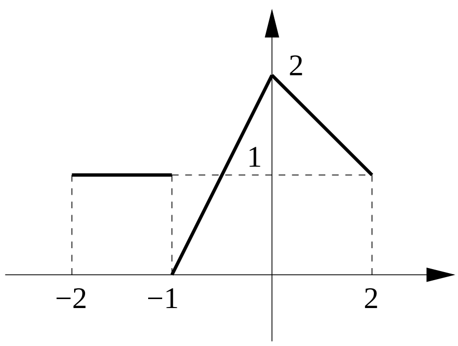
Esercizio 2: Sia $h(x)$ la funzione periodica di periodo 1 e che vale $1-x$ per $x \in (0,1]$. Si determini ascissa di convergenza e trasformata di Laplace delle funzioni:

a) (4 punti) $f(x) = \begin{cases} h(x)\sin(\pi x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

b) (4 punti) $g(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x h(t)e^{-t}\,dt, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

Esercizio 3:

(6 punti) Determinare la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ il cui grafico è riportato in figura:



Esercizio 4:

a) (6 punti) Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^6 + z^3 + 1 = 0$$

e disegnare tali valori nel piano complesso.

Esercizio 5:

a) (7 punti) Per approssimare il segnale $f(x) = \chi_{[0,\frac{3}{4}\pi]}(x)$ per $x \in [0,\pi]$ si ha a disposizione un oscillatore che emette un segnale sinusoidale del quale possiamo regolare la fase e l'ampiezza ma non la frequenza. Indicato con $g(x) = A\sin(x+\varphi)$ il segnale emesso dall'oscillatore, determinare A e φ in modo da ottenere la migliore approssimazione di $f(x)$ per $x \in [0,\pi]$.

a) (2 punti) Calcolare l'errore di approssimazione commesso con l'approssimazione determinata al punto precedente.