

METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2004-2005  
12 luglio 2005 - prova scritta secondo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

**Esercizio 1:**

(6 punti) Facendo uso delle trasformate di Laplace si risolva, per  $x \geq 0$ , il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 2:**

a) (4 punti) Determinare raggio di convergenza e somma della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(n-1)!} (z-3)^n.$$

b) (2 punti) Utilizzando il risultato del punto a), calcolare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n (n+1)}{(n-1)!}.$$

**Esercizio 3:**

a) (5 punti) Determinare gli  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$\cos(z) = \sqrt{3}i \cosh(iz) + 2 \sin(z)$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

b) (3 punti) Indicate con  $z_1$  e  $z_2$  le due soluzioni dell'equazione precedente che distano meno dall'origine, si determini l'area del triangolo con vertici in  $z_1$ , in  $z_2$  e nell'origine.

**Esercizio 4:**

a) (6 punti) Determinare lo sviluppo in serie di soli coseni, per  $x \in [0, \pi]$ , della funzione  $f(x) = 2\pi - 2x$  e calcolare l'errore commesso approssimando  $f(x)$  con soltanto i primi due termini della serie.

b) (2 punti) Indicata con  $g(x)$  la somma della serie di Fourier determinata al punto precedente, per quali  $x \in \mathbb{R}$  vale l'uguaglianza  $g(x) = 2\pi - 2x$ ?

**Esercizio 5:**

a) (5 punti) Determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{per } x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

b) (3 punti) Sfruttando il più possibile il lavoro svolto al punto a) determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f_2(x) = \begin{cases} \cos^2 x, & \text{per } x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}.$$

---

**ESERCIZIO RISERVATO AGLI STUDENTI 2001-2002  
IN SOSTITUZIONE DELL'ES. 2**

**Esercizio 2 bis:**

(6 punti) Calcolare

$$\int_T \frac{dz}{z(z+i)}$$

dove  $T$  è il cammino riportato in figura percorso da  $A$  verso  $B$ .

