METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2004-2005

23 giugno 2005 - prova scritta primo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di solzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1:

a) (4 punti) Determinare la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati, per $x \in [-\pi, \pi]$, della funzione $f(x) = x \cdot \chi_{[-\pi,0]}(x)$ mediante funzioni del tipo $g(x) = a + b\sin(x), \quad a, b \in \mathbb{R}$.

b) (2 punti) Determinare l'errore commesso con l'approssimazione.

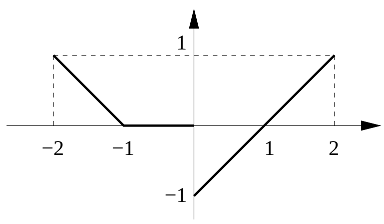
Esercizio 2:

(5 punti) Facendo uso delle trasformate di Laplace, determinare una funzione $u(x)$ tale che

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^x (u(t) - u'(t))(x - t)\, dt = x^2 & t > 0 \\ u(0) = -1 \end{cases} .$$

Esercizio 3:

a) (4 punti) Determinare la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ il cui grafico è riportato in figura.



b) (3 punti) Sfruttando il più possibile il lavoro svolto al punto a) determinare la parte dispari $f_D(x)$ della funzione $f(x)$ e la sua trasformata di Fourier.

Esercizio 4:

a) (4 punti) Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} (z+1)^3 + 1 = 3z(z+1) + 2i \\ (z-2i)^4 = -1 \end{cases}$$

b) (3 punti) Disegnare gli insiemi A e B degli $z \in \mathbb{C}$ definiti dalle seguenti relazioni:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tali che } (z+1)^3 + 1 = 3z(z+1) + 2i\},$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} \text{ tali che } (z-2i)^4 = -1\}$$

e calcolare $d = \max\{|a_i - b_j|\}$ per $a_i \in A$, $b_j \in B$.

Esercizio 5:

a) (4 punti) Determinare raggio di convergenza e somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{3(n+1)}}{n+1}.$$

b) (3 punti) Indicata con $f(z)$ la somma della serie al punto a), calcolare

$$\frac{d^4 f}{dz^4}(0).$$

ESERCIZI RISERVATI AGLI STUDENTI 2001-2002
IN SOSTITUZIONE DEGLI ES.2 E 5

Esercizio 2 bis:

(5 punti) Facendo uso delle trasformate di Laplace si risolva, per $t \geq 0$, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 4y'' + 1 = x \\ y(0) = -1, \;\; y'(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5 bis:

a) (4 punti) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-1}$ dove $\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\theta}, \; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$.

b) (3 punti) Sfruttando il risultato del punto a) si calcoli $\displaystyle\int_\beta \frac{dz}{z-1}$ dove β è la frontiera del dominio riportato in figura percorsa in senso positivo.