Metodi Matematici - IDI - 2002-2003 — Prima Prova Intercorso 28 Maggio 2003

n. 1 cognome nome matricola

Risposte	1	3	2	1	4	3	2	3	2	1	2	2
Domande	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Scrivere il numero della risposta che si ritiene corretta sopra al numero della corrispondente domanda.
Sufficienza 18 punti. Punteggio massimo 30 punti.

Domanda 1) Quale delle affermazioni seguenti è vera?

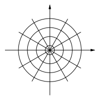
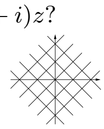
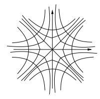
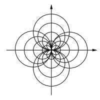
1) La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $f(x) = \cosh(ix)$ è periodica.
2) La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $f(x) = \sin(ix)$ è periodica.
3) $e^z > 0$ per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $e^z \in \mathbb{R}$.
4) La funzione $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $f(z) = \sin(iz)$ è periodica.

Domanda 2) Sia data l'equazione nel campo complesso

$$z^2|z| = \overline{z}i$$

1) Tutti i numeri complessi di modulo 1 sono soluzione.
2) L'equazione ammette 6 soluzioni distinte.
3) Esistono soluzioni di argomento $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{5}{6}\pi$, $\pm\frac{1}{2}\pi$.
4) Tutti i numeri complessi di argomento $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{5}{6}\pi$, $\pm\frac{1}{2}\pi$ sono soluzione.

Domanda 3) (4 punti) Quale dei grafici seguenti meglio rappresenta le linee di livello di parte reale e parte immaginaria della funzione $f(z) = (1+i)z$?

1) 
2) 
3) 
4) 

Domanda 4) (4 punti) Si consideri l'equazione

$$\log\left(\frac{i}{\sin(iz)}\right) = \frac{\pi}{2}i.$$

1) Le soluzioni sono allineate lungo una retta verticale.
2) L'equazione ha una sola soluzione.
3) Tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $e^{\mathrm{Re}(z)} = 1$ sono soluzione.
4) L'equazione è soddisfatta solo da $z = -\dfrac{\pi}{2}i$.

Domanda 5) I numeri complessi w_1 e w_2 sono due valori di $\sqrt[n]{z}$ e sono tali che $\dfrac{w_1}{w_2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Quale delle affermazioni seguenti è corretta?

1) Il modulo di z è 1.
2) $n = 6$
3) $n = 6k\pi i$ per k intero.
4) n può assumere infiniti valori distinti.

Domanda 6) Sia $z = x + iy$ e sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $f(0) = 0$ e $\mathrm{Im}f(z) = ax^2 + bxy + cy^2$. Allora

1) Se f è olomorfa, $\mathrm{Im}f(z) = 2axy + \dfrac{b}{2}(y^2 - x^2)$
2) f è olomorfa se e solo se $a = -c$, $b = 0$
3) Se f è olomorfa, $\mathrm{Re}f(z) = 2cxy + \dfrac{b}{2}(x^2 - y^2)$
4) f è olomorfa soltanto se $a = c = 0$

Domanda 7) Sia $f(z)$ una funzione analitica in $\mathbb{C}$ non identicamente nulla. Quale tra gli insiemi seguenti non può essere l'insieme degli zeri di f?

1) $N = \{z \in \mathbb{C} \text{ tali che } z^{74} - 12z^{17} - 521 = 0\}$
2) $N = \left\{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n i,\ n \in \mathbb{N}\right\}$
3) $N = \{k + i/k \text{ per } k \text{ intero positivo}\}$
4) $N = \{e^{\sqrt{n}\pi i},\ n \in \mathbb{N}\}$

Domanda 8) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} z^n$$

1) $e^z(z-1)$
2) $e^z - 1 - ze^z$
3) $e^x(x+1)$
4) $ze^z + 1$

Domanda 9) Calcolare $f^{(235)}(0)$ quando $f(z) = \arctan(z)$.

1) $234!$
2) $-234!$
3) $235!$
4) $-117!$

Domanda 10) Per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^n n}?$$

1) $0 \le x < 6$
2) $-3 < x < 3$
3) $0 \le x \le 4$
4) $0 < x < 6$

Domanda 11) (4 punti) Sia ρ è il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n(n+2)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Quale delle affermazioni seguenti è vera?

1) $\rho = 1$. La serie non converge per nessun $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = \rho$.
2) $\rho = 1$. La serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = \rho$.
3) $\rho = 1$. La serie converge solo per alcuni $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| = \rho$.
4) La serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Domanda 12) (4 punti) Calcolare il raggio di convergenza ρ della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$$

1) $\rho = e$
2) $\rho = 1/\sqrt[3]{e}$
3) $\rho = 1/e$
4) $\rho = 1$