Soluzioni Foglio 2

Esercizio 2.1

a) La serie converge per $|z| < 1$. La somma della serie è $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

b) $\rho = 1$. La serie converge, ad esempio, per $z = -1$ e per $z = i$; diverge per $z = 1$. La somma della serie è $f(z) = -\dfrac{\ln(1-z)}{z}$ estesa con continuità nello zero.

c) $\rho = 1$. La serie non converge per nessuno z di modulo 1. La somma della serie è $f(z) = \dfrac{2z-1}{(1-z)^2}$.

d) La serie converge per $|z| > 1$. Non converge per nessuno z di modulo 1. La somma della serie è $f(z) = \dfrac{2}{\sinh(\ln z)}$ oppure, se preferite, $\dfrac{z}{z^2-1}$.

Esercizio 2.2

a) La serie converge per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| \leq 1$.

b) La serie converge per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| \leq \sqrt{3}$.

c) La serie converge per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| \leq 1$.

Esercizio 2.4

a) Non è possibile determinare i coefficienti a_k: $f(z) = |z|$ non è derivabile per $z = 0$; di conseguenza non è analitica nel cerchio $|z| < 1$. D'altra parte la somma di una serie di potenze è una funzione analitica e questo porta ad una contraddizione.

b) Non è possibile determinare i coefficienti a_k: la funzione ha una singolarità all'interno di $|z-2| < 1$. Non essendo continua non può essere analitica.

c) La funzione è derivabile in senso complesso per tutti gli z tali che $|z-2| < 1$. Gli a_k si possono ottenere dallo sviluppo in serie di Taylor di f di centro 2.

d) Non è possibile determinare gli a_k opportuni. Nonostante la funzione sia analitica *in senso reale* nel dominio considerato, si verifica facilmente che le condizioni di Cauchy-Riemann non sono soddisfatte.
Alternativamente è sufficiente osservare che l'equazione $|z| = 1$ è verificata su una circonferenza. Per il principio di identità delle funzioni olomorfe la funzione considerata dovrebbe essere identicamente uguale a 1, ma così non è.

e) La funzione coincide con la funzione (analitica) identicamente nulla per gli $x < 1$. Per il principio di identità delle funzioni analitiche, se f fosse analitica dovrebbe essere nulla in tutto $(0, 2)$ ma così non è. Quindi non è possible deteminare gli a_k. Avremo potuto procedere anche in modo analogo al punto b).

Esercizio 2.5

a) È sufficiente verificarne la derivabilità in senso complesso.

b) Il raggio di convergenza è pari alla distanza tra il centro della serie di potenze e la singolarità più vicina (nel nostro caso $z = i$ o $z = -i$). Il raggio vale $\sqrt{2}$.