METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2008-2009

19 dicembre 2008 - prova scritta primo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Sono ammessi alla prova orale gli studenti che risolvono correttamente e completamente l'esercizio 1 e uno a scelta tra i rimanenti.

IND - INF: Risolvere gli esercizi 1, 3, 4, 5 e uno a scelta tra 2a e 2b
IAR: Risolvere gli esercizi 1, 2a, 2b, 3.

Esercizio 1: Per quali $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ il sistema

$$\begin{cases} z^4 = |z|^2 + 2 \\ z^2 = \cos(\alpha) \end{cases}$$

ammette soluzione?

Esercizio 2a: Utilizzando le trasformate di Laplace risolvere, per $t > 0$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y = 2\cosh(x) + e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 2b: Determinare la funzione $f(x)$ trasformabile secondo Laplace e tale che

$$\widehat{f}(s) = e^{-s} \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right).$$

Si determini il semipiano di convergenza della trasformata di Laplace della soluzione.

Esercizio 3: Determinare, se esiste, una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che, se $z = x + iy$,

$$\operatorname{Re} f = x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad f(i) = -1 - i.$$

Esercizio 4: Sia $f(x)$ una funzione sviluppabile in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ e sia

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

il suo sviluppo in serie di Fourier.
Determinare i coefficienti p_n e q_n dello sviluppo in serie di Fourier

$$\frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos(nx) + q_n \sin(nx)$$

della funzione $g(x) = f(x)\sin(x)$.

Esercizio 5: Determinare la trasformata di Fourier della funzione:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^4 + 3x^2 + 2}.$$