METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2007-2008

18 aprile 2008 - prova scritta terzo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Sono ammessi alla prova orale gli studenti che risolvono correttamente e completamente l'esercizio 1 e uno a scelta tra i successivi.

Esercizio 1: Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ le soluzioni dell'equazione

$$|z-1| + i|az| = |z-i| + i$$

appartengono all'insieme $B = \{z \in \mathbb{C} \colon i|z|^2 + 2z \in \mathbb{R}\}$.

Per tali valori di a determinare le soluzioni dell'equazione esprimendole sia in forma cartesiana che in forma esponenziale.

Esercizio 2: Si risolva per $x > 0$, utilizzando la trasformata di Laplace, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = e^x \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Si determini il semipiano di convergenza della trasformata di Laplace della soluzione.

Esercizio 3: Determinare il valore di $z_0 \in \mathbb{R}$ per cui il dominio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1+\sqrt{2})^n}$$

contiene l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} \colon |z\, e^{\frac{\pi}{4}i} - 2| < 1\}$.

Indicata con $f(z)$ la somma della serie per tale valore di z_0, si calcoli $f(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})$ esprimendo il risultato in forma cartesiana, in forma esponenziale e in forma trigonometrica.

Esercizio 4: Determinare $n \in \mathbb{N}$ ed $A \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f_{n,A}(x) = A\sin(nx)$ sia la miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati di $g(x) = \chi_{[0,\frac{\pi}{6}]}(x)$ per $x \in [-\pi, \pi]$.
Si determini l'errore commesso con l'approssimazione.