

19 dicembre 2007 - prova scritta primo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Sono ammessi alla prova orale gli studenti che risolvono correttamente e completamente l'esercizio 1 più uno a scelta tra i successivi.

Esercizio 1: Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} z^6 = \alpha \\ \left(z - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{8}{9}\sqrt{3} \end{cases}$$

ammette soluzione. Per ciascuno dei casi in cui questo avviene scrivere le soluzioni del sistema in forma cartesiana.

Esercizio 2: Facendo uso della trasformata di Laplace si determini, per $x > 0$, la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y' = \chi_{[0,1)}(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases} .$$

Si determini inoltre l'ascissa di convergenza della soluzione del problema.

Esercizio 3: Determinare raggio di convergenza e somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3^n + \frac{1}{2^n}\right) \frac{z^n}{n}$$

Stabilire il carattere della serie per $z = \frac{i}{\sqrt{3}}$.

Esercizio 4: Scrivere la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 - 2x + 2}$. Sfruttare il risultato ottenuto per calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

Esercizio 5: Tra tutti i polinomi di grado minore o uguale a 4 passanti per l'origine determinare quello che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati la funzione $f(x) = |x|$ per $x \in [-1, 1]$. Calcolare l'errore commesso con l'approssimazione.