METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2004-2005

7 aprile 2006 - prova scritta settimo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1:

a) (6 punti) Data l'equazione:

$$z^8 + 2i\lambda(\sin\varphi)z^4 - \lambda^2 = 0$$

per λ reale positivo e φ reale, determinare λ e φ in modo che le sue radici siano situate sulla circonferenza con centro nell'origine e raggio 2 ed almeno una di esse sia reale.

Esercizio 2:

(6 punti) Determinare raggio di convergenza e somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}.$$

Indicata con $h(x)$ la somma della serie, quanto vale $h(0)$?

Esercizio 3:

(6 punti) Tra le combinazioni lineari di 1, $\cos(x)$, $\sin(2x)$ determinare quella che meglio approssima $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ nel senso dei minimi quadrati nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Si determini l'errore commesso con l'approssimazione.

Esercizio 4:

a) **(6 punti)** (Suggerimento: disegnate il grafico di $f(x)$ e di $g(x)$ Determinare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ xe^x & \text{per } x \in [2n, 2n+1),\ n \geq 0 \\ -xe^x & \text{per } x \in [2n+1, 2n+2),\ n \geq 0 \end{cases}.$$

b) **(3 punti)** Sfruttando possibilmente il punto a), determinare la trasformata di Laplace della funzione

$$g(x) = \begin{cases} xe^x & \text{per } x \in [2n+1, 2n+2),\ n \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Esercizio 5a: (solo studenti a.a. 2002-2003 e successivi)

(6 punti) Utilizzando le trasformate di Laplace si risolva, per $t \geq 0$, il problema seguente:

$$\begin{cases} f'(x) + \displaystyle\int_0^t f(t)\cos(2(x-t))\,dt = 10 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

Esercizio 5b: (solo programma 2001-2002)

(6 punti) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^4+1}.$$