METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2004-2005

10 gennaio 2006 - prova scritta quinto appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1:

a) (5 punti) Determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) e^{-|x|}$$

b) (4 punti) Determinare la parte pari e la parte dispari di $f(x)$ e le rispettive trasformate di Fourier.

Esercizio 2:

(5 punti) Determinare la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati dei vettori $V = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $W = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ mediante elementi del piano individuato da $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

In entrambi casi si calcoli l'errore commesso con l'approssimazione.

Esercizio 3:

(5 punti) Sia $z \in \mathbb{C}$. Si determinino le radici complesse dell'equazione

$$z^3\overline{z} + 3z^2 - 4 = 0.$$

Si rappresentino poi tali radici nel piano complesso e si calcoli il perimetro del poligono da esse individuato.

Esercizio 4: Sia

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \left(\cos(2nx) - \frac{1}{2}\sin((2n+1)x)\right)$$

a) (5 punti) Quanto vale $\|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}$?

b) (3 punti) Calcolare $f(0) - f(-\pi)$.

Esercizio 5:

(6 punti) Facendo uso delle trasformate di Laplace, si determini la soluzione per $x > 0$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = \sin(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$