

19 febbraio 2005 - prova scritta sesto appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1:

(4 + 4 punti) Determinare la trasformata di Fourier delle funzioni seguenti:

$$\text{a) } f(x) = \frac{\sin x}{e^{|x|}}, \quad \text{b) } g(x) = \frac{\sin^2 x}{e^{|x|}}.$$

Esercizio 2:

- a) (5 punti) Tra le funzioni dell'insieme $A = \{a + b \cos x + c \sin x, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ determinare quella che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati $f(x) = x + x^2$ per $x \in [-\pi, \pi]$.
- b) (3 punti) Calcolare l'errore commesso con l'approssimazione.
- c) (4 punti) In base al risultato del punto a), qual'è la migliore approssimazione di $g(x) = -2x + x^2$ tra le funzioni dell'insieme A ?

Esercizio 3:

- a) (5 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 0 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

utilizzando le trasformate di Laplace.

- b) (2 punti) Determinare il semipiano di convergenza della trasformata di Laplace della soluzione.

Esercizio 4: Data la serie di potenze $\sum_{n=2}^{\infty} x^{3n-2}$,

- a) (3 punti) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.
- b) (3 punti) Indicata con $f(x)$ la somma della serie, calcolare

$$3 \frac{d^7 f}{dx^7}(0) - 7 \frac{d^3 f}{dx^3}(0)$$