METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2003-2004

8 settembre 2004 - prova scritta terzo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di solzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1:

a) (4 punti) Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = x(2\pi - x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$;

b) (2 punti) sfruttando il risultato ottenuto al punto a) scrivere la serie di Fourier di $g(x) = 2(\pi - x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$;

c) (3 punti) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di $g(x)$ converge puntualmente a $g(x)$.

Esercizio 2: (4 punti) Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} z^2\overline{z} - \overline{z}z = -\overline{z} \\ (z^3 + \overline{z})^3 = 1 \end{cases} .$$

Esercizio 3: (5 punti) Facendo uso delle trasformate di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = e^{1+x} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases} .$$

Esercizio 4:

a) (2 punti) Determinare il raggio di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1 + n^2)z^n$;

b) (3 punti) Se $f(x)$ è la somma della serie al punto a), quanto vale $\dfrac{d^5 f}{dz^5}(0)$?

c) (5 punti) Determinare $f(z)$.

Esercizio 5: (4 punti) Per quali valori dei coefficienti $a, b, c \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(z) = \frac{a}{z-1} + b|z|^2 + \frac{c}{z^2-1} + 2iz\,\mathrm{Im}\,z$$

è estendibile ad una funzione olomorfa nell'insieme $A = \{z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - 1| < 3/2\}$?