Metodi Matematici - IDI - 2002-2003 — Seconda Prova Intercorso 24 Giugno 2003

n. 1 cognome nome matricola

Risposte											
Domande	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Scrivere il numero della risposta che si ritiene corretta sopra al numero della corrispondente domanda.
Sufficienza 18 punti. Punteggio massimo 30 punti.

Domanda 1) (VALE DOPPIO) Si vuole approssimare la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ nel senso dei minimi quadrati con funzioni del tipo $ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ nell'intervallo $[0, 2]$. L'errore commesso nell'approssimazione vale

1) $\frac{8}{5}(\sqrt{2} - 1) - \frac{24}{35}\sqrt{3}$ 2) $\frac{6}{35}$
3) $\frac{36}{1225}$ 4) $\frac{8}{5} + \frac{24}{35}\sqrt{3}$

Domanda 2) Sia $g(x)$ sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = \cos(x/2)$ in $[-\pi, \pi]$. Allora,

1) è possibile sviluppare $f(x)$ in serie di soli seni.
2) $g(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8n\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)}{\pi(n^2 - 1)} \cos\left(\frac{n}{2}x\right)$
3) $g(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4n}{\pi(4n^2 - 1)} \cos(nx)$
4) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}8n}{\pi(4n^2 - 1)} \cos(nx)$

Domanda 3) Siano $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ ortogonali. Quale delle affermazioni seguenti è vera?

1) $f + g$ ed $f - g$ sono sempre ortogonali.
2) Se f è dispari e g è pari allora $< f + \cos x, g + \sin x >= 0$.
3) Se f è dispari allora g deve essere pari.
4) $f + g$ ed $f - g$ sono ortogonali se e solo se $\|f\| = \|g\|$.

Domanda 4) Sia $f(x) = |\sin(x)|$. Quale delle affermazioni seguenti è corretta?

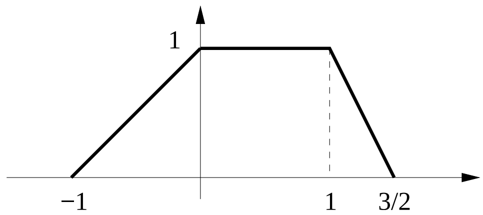
1) La serie di Fourier di $f(x)$ converge ad $f(x)$ soltanto per $x \in [-\pi, \pi]$
2) Il coefficiente di $\sin(x)$ nello sviluppo in serie di Fourier in $x \in [-\pi, \pi]$ è 0.
3) Il coefficiente di $\sin(x)$ nello sviluppo in serie di Fourier in $x \in [-\pi, \pi]$ è 1.
4) La serie di Fourier di $f(x)$ converge ad $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Domanda 5) Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 8}.$$

1) $\frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{2}|\xi| + \frac{1}{2}i\xi}$ 2) $\pi e^{-3|\xi| + \frac{i}{3}\xi}$
3) $\frac{\pi}{2} e^{-2|\xi| - 2i\xi}$ 4) $\frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{2}|\xi| + \frac{1}{2}i\xi}$

Domanda 6) (4 punti) Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\xi)$ della funzione $f(x)$ riportata in figura:



1) $\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{\xi}\left[e^{\frac{1}{2}i\xi}\sin(\xi/2) - 2e^{-\frac{5}{4}i\xi}\sin(\xi/4)\right]$
2) $\widehat{f}(\xi) = -\frac{2}{\xi}\left[e^{-\frac{1}{2}i\xi}\sin(\xi/2) - 2e^{\frac{5}{4}i\xi}\sin(\xi/4)\right]$
3) $\widehat{f}(\xi) = \frac{2i}{\xi^2}\left[e^{-\frac{1}{2}i\xi}\sin(\xi/2) - 2e^{\frac{5}{4}i\xi}\sin(\xi/4)\right]$
4) $\widehat{f}(\xi) = -\frac{2i}{\xi^2}\left[e^{\frac{1}{2}i\xi}\sin(\xi/2) - 2e^{-\frac{5}{4}i\xi}\sin(\xi/4)\right]$

Domanda 7) Siano $f(x) = e^{-x}\sin x + e^{2x}\sin^2 x$ e $g(x) = e^{2x}(1 - \cos^2 x) + x$. Siano $F(s)$ e $G(s)$ le loro trasformate di Laplace. Il semipiano di convergenza della trasformata di Laplace di $f(x) - g(x)$ è:

1) $\operatorname{Re} s > -1$
2) $\operatorname{Re} s \leq 0$
3) $\operatorname{Re} s > 0$
4) Contenuto in quello della trasformata di $f(x)$

Domanda 8) La trasformata di Laplace $\widehat{f}(s)$ di $f(x) = \int_0^x t^2(x - t)^4\,dt$ vale

1) $\frac{15}{s^{12}}$ 2) $\frac{48}{s^6}$ 3) $\frac{2! \cdot 4!}{s^{15}}$ 4) $\frac{48}{s^8}$

Domanda 9) (4 punti) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π tale che

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x) - 1 & x \in [0, \pi) \\ \sin(2x) + 1 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}.$$

1) $\widehat{f}(s) = \frac{2}{s^2 + 4} - \frac{(e^{\pi s} - 1)^2}{s(e^{2\pi s} - 1)}$
2) $\widehat{f}(s) = \frac{2}{s^2 + 4} - \frac{(1 - e^{-\pi s})^2}{s^2(1 - e^{-2\pi s})}$
3) $\widehat{f}(s) = \frac{2(1 - e^{-\pi s})^{-1}}{s^2 + 4} - \frac{(1 - e^{-\pi s})}{s}$
4) $\widehat{f}(s) = \frac{2(1 - e^{-2\pi s})^{-1}}{s^2 + 4} - \frac{(1 - e^{-\pi s})^2}{s(1 - e^{-2\pi s})}$

Domanda 10) (4 punti) Calcolare la trasformata di Laplace della funzione $y(t)$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = \chi_{[1,2]}(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

1) $\widehat{y}(s) = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s}$

2) $\widehat{y}(s) = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s-2)(s-3)}$

3) $\widehat{y}(s) = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{e^{s}(1-e^{s})}{s(s-2)(s-3)}$

4) $\widehat{y}(s) = \dfrac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s-2)(s-3)}$

Domanda 11) Se $\widehat{f}(s)$ è la trasformata di Laplace di $f(x)$ e $g(x) = e^{2x} f(3x-4)$, allora

1) $\widehat{g}(s) = \dfrac{e^{4(s-2)}}{3} \widehat{f}\left(\dfrac{s-2}{3}\right)$

2) $\widehat{g}(s) = \dfrac{e^{2(s+4)}}{3} \widehat{f}\left(\dfrac{s+4}{3}\right)$

3) $\widehat{g}(s) = \dfrac{e^{-4s+8}}{3} \widehat{f}\left(\dfrac{s}{3} - \dfrac{2}{3}\right)$

4) $\widehat{g}(s) = \dfrac{e^{-2(s-4)}}{3} \widehat{f}\left(\dfrac{s-4}{3}\right)$