Soluzioni Foglio 3

Esercizio 3.1 Sia $z = x + iy$ allora:

a) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$;

b) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$;

c) $\tan z = \dfrac{\sin x \cos x + i \sinh y \cosh y}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y}$;

d) $\cot z = \dfrac{\sin x \cos x - i \sinh y \cosh y}{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y}$;

e) $z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - b^3)$;

f) $\bar{z} = x - iy$;

g) $|z| = \sqrt{x^2+y^2} + 0i$;

h) Vedi paragrafo 1.4 delle dispense.

i) $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - i\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

j) $\dfrac{z}{1-z} = \dfrac{\operatorname{Re} z - |z|^2}{|1-z|^2} + i\dfrac{\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}$;

k) $\ln(|z|)$ è una funzione a valori reali.

Sono olomorfe le funzioni a), b), c), d), e), i), j).

Esercizio 3.2

a) $f(z) = \dfrac{z^2}{2i} - \dfrac{2+i}{2}$

b) $f(z) = c(i+1) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

c) $f(z) = \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{2} - i$;

d) Nessuna soluzione.

Esercizio 3.3

a) $f(z)$ ha quattro poli, tutti del primo ordine, nei punti $z_1 = i, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = (1+i)/\sqrt{2}, \quad z_4 = -(1+i)/\sqrt{2}$.

b) $z_1 = 1$ è un polo del secondo ordine; $z_2 = -1$ è un polo del primo ordine mentre $z_3 = -2$ è una discontinuità eliminabile.

c) $z_a = i$ è un polo del secondo ordine; $z_b = -i$ è un polo del primo così come tutti i punti $z_k = \pi/2 + k\pi$ per k intero.

d) $z_1 = 0$ è una discontinuità eliminabile (addirittura è uno zero doppio); $z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_3 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sono invece poli del primo ordine.

Esercizio 3.4 Calcoliamo i residui delle funzioni dell'esercizio precedente nei loro poli:

a)

$$\operatorname{Res}(f,z_1) = -\frac{\sin(i)}{2i(i+1)}; \qquad \operatorname{Res}(f,z_3) = \frac{\sin((1+i)/\sqrt{2})}{\sqrt{2}(i+1)^2};$$

$$\operatorname{Res}(f,z_2) = \frac{\sin(-i)}{2i(i+1)}; \qquad \operatorname{Res}(f,z_4) = -\frac{\sin(-(1+i)/\sqrt{2})}{\sqrt{2}(i+1)^2};$$

b)

$$\operatorname{Res}(f,z_1) = -\frac{1}{4}; \qquad \operatorname{Res}(f,z_2) = \frac{1}{4}; \qquad \operatorname{Res}(f,z_3) = 0;$$

c)

$$\operatorname{Res}(f,z_a) = \frac{1}{2i\cos^2(i)} + \frac{\tan(i)}{4}; \qquad \operatorname{Res}(f,z_b) = -\frac{\tan(-i)}{4};$$

$$\operatorname{Res}(f,z_k) = -(-1)^k \frac{i + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{\left(1 + \frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2};$$

d)

$$\operatorname{Res}(f,z_1) = 0; \qquad \operatorname{Res}(f,z_2) = -\frac{1}{4}; \qquad \operatorname{Res}(f,z_3) = -\operatorname{Res}(f,z_2);$$

A questo punto gli integrali si possono calcolare col teorema dei residui sommando i residui nei poli interni al dominio e moltiplicando la somma per $2\pi i$.

Esercizio 3.5

a) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$;

b) $(-3)^m \dfrac{\pi}{4}$;

c) π;

d) $\pi \sinh(1)$;

e) $\dfrac{2}{3}\pi\sqrt{3}$;

f) $\dfrac{\pi}{2}$.