Esercizi - Foglio 5 - Spazi di Hilbert e serie di Fourier

Esercizio 5.1 Tra tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ appartenenti al piano di equazione $2x - 2y + z = 0$ determinare quello che meglio approssima il vettore $(0,0,1)$ nel senso dei minimi quadrati. Calcolare l'errore commesso.

Esercizio 5.2 Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2, considerati come funzioni definite in $(-1,1)$. V è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx. \tag{1}$$

Determinare una base ortonormale di V rispetto al prodotto scalare (1).

Esercizio 5.3 Sia W lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2, considerati come funzioni definite in $(0,1)$. Determinare una base ortonormale di W rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Esercizio 5.4 Dopo aver risolto l'esercizio 5.2, determinare l'elemento di V che meglio approssima in norma $L^2(-1,1)$ le funzioni seguenti:

a) x^3;
b) x^4;
c) $\sin(x)$;
d) $\cos(x)$;
e) e^x;
f) $|x|$,
g) $\sqrt{|x|}$,
h) $\sqrt{|x^3|}$,

Esercizio 5.5 Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier in $(-\pi,\pi)$ delle funzioni

a) $f(x) = x$;
b) $f(x) = |x|$;
c) $f(x) = x|x|$;
d) $f(x) = 1$;
e) $f(x) = \mathsf{sign}(x)$;
f) $f(x) = x^3$;
g) $f(x) = x^4$;
h) $f(x) = xe^x$;
i) $f(x) = e^{ax}$;
j) $f(x) = \mathsf{sinh}(x)$;
k) $f(x) = \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$;

Cercate di ricavare lo sviluppo f) a partire da g); gli sviluppi c), e), k) a partire da b).

Esercizio 5.6 Risolvere i problemi di Cauchy:

a) $$\begin{cases} u_{xx} - 2u_t = 0 & (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \sin(x) & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 & (x,t) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(2\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \pi - |\pi - x| & x \in [0,2\pi] \end{cases}$$