

Esercizi - Foglio 3 - Analisi complessa

Esercizio 3.1 Calcolare parte reale e parte immaginaria delle funzioni seguenti e stabilire quali di esse sono olomorfe nei loro dominio di definizione:

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------------|--------------------|
| a) $\sin(z)$ | d) $\cot(z)$ | g) $ z $ | j) $\frac{z}{1-z}$ |
| b) $\cos(z)$ | e) z^3 , | h) $\arg(z)$ | |
| c) $\tan(z)$ | f) $\bar{z}$ | i) $\bar{z}/ z ^2$ | k) $\ln(z)$ |

Esercizio 3.2 Sia $z = x + iy$. Determinare le funzioni olomorfe $f(z)$ che soddisfano i requisiti seguenti:

- | | |
|---|---|
| a) $\operatorname{Re} f = xy - 1$ e $f(i) = -1$. | c) $\operatorname{Im} f = xy - 1$ e $f(i) = -i$. |
| b) $\operatorname{Re} f = \operatorname{Im} f$. | d) $\operatorname{Re} f = xy - 1$ e $f(i) = -i$. |

Esercizio 3.3 Individuare e classificare le singolarità delle funzioni:

- | | |
|--|--|
| a) $f(z) = \frac{\sin(z)}{(z^2 + 1)(z^2 - i)}$ | c) $f(z) = \frac{\tan(z)(z + i)}{(z^2 + 1)^2}$ |
| b) $f(z) = \frac{z + 2}{(z^2 - 1)(z^2 + z - 2)}$ | d) $f(z) = \frac{1 - z^2/2 - \cos(z)}{z^2(z^2 + z + 1)}$ |

Esercizio 3.4 Per ciascuna delle funzioni dell'esercizio 3.3 calcolare $\int_{\gamma} f(z) dz$ nei casi seguenti:

- | | |
|--|--|
| 1) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } z = 1/2\}$ | 3) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } z - i = 1/2\}$ |
| 2) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } z = 3/2\}$ | |
| 4) γ è il rettangolo di vertici $z_1 = -1/2 - i/2$, $z_2 = 3 - i/2$, $z_3 = 3 + i/2$, e $z_4 = -1/2 + i/2$ | |

Esercizio 3.5 Calcolare gli integrali seguenti utilizzando il teorema dei residui.

- | | |
|--|---|
| a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ | d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)} dx$ |
| b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx)}{5+3\cos x} dx, \quad m \in \mathbb{N}$ | e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx$ |
| c) $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$ | f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$ |