

Esercizi - Foglio 2 - Serie di Potenze

Esercizio 2.1 Determinare il raggio di convergenza delle serie

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1} \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)z^k \quad \text{d) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+1}}$$

e calcolarne la somma.

Indicato con ρ il raggio di convergenza delle serie, verificare per ciascuna, se esistono $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = \rho$ per cui le serie convergono. La serie b) è convergente per $z = i$?

Esercizio 2.2 Determinare per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ convergono la serie

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{3^k + 1} \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{2^k k}$$

Esercizio 2.3 Verificare che la funzione $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ è derivabile infinite volte in $x = 0$, ma la serie di Taylor di f centrata in zero non converge ad f .

Esercizio 2.4 È possibile determinare dei coefficienti a_k tali che la somma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

- a) sia uguale a $|z|$ per $|z| < 1$?
b) sia uguale a $\frac{1}{(z-1)^2}$ per $|z| < 2$?
c) sia uguale a $\frac{1}{1-z}$ per $|z-2| < 1$?
d) sia uguale a $|z|$ per $|z-2| < 1$?
e) coincida con la funzione $\begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ per $x \in (0, 2)$?

Esercizio 2.5 Sia $f(x) = \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}$.

- a) Verificare che f è analitica in un intorno di $z = -1$;
b) Senza determinare esplicitamente la serie, si può dire quanto vale il raggio di convergenza dello sviluppo di f in serie di potenze di centro $z = -1$?